



Marc Gabay

PLAN DE LA PRESENTATION

I. CARACTERES GENERAUX DES SYMETRIES BRISEES

I. A Classification zoologique d'Ehrenfest.

I. B Concept de symétries brisées: symétrie rime (généralement) avec entropie.

- symétries globales continues
- symétries locales de jauge continues
- symétries discrètes

I. C Introduction d'un paramètre d'ordre m .

- quantifie la brisure de symétrie
- classification de Landau des transitions
- au-delà de la classification de Landau

II. THERMODYNAMIQUE LORS D'UNE BRISURE DE SYMÉTRIE

II. A Champ moyen de Weiss

II. B Énergie libre de Landau au voisinage de T_c

- Transition du 2nd ordre
- Transition du 1^{er} ordre
- Changement d'ordre de la transition (point tricritique)
- Exposants critiques et relations entre exposants

III. LA TRANSITION BEREZINSKII-KOSTERLITZ-THOULESS (BKT) A 2D

**III. A Fluctuations de grandes longueurs d'ondes
du modèle XY. Quasi-ordre de phase**

**III. B Défauts topologiques : description heuristique
de la transition BKT**

- Vortex - Antivortex

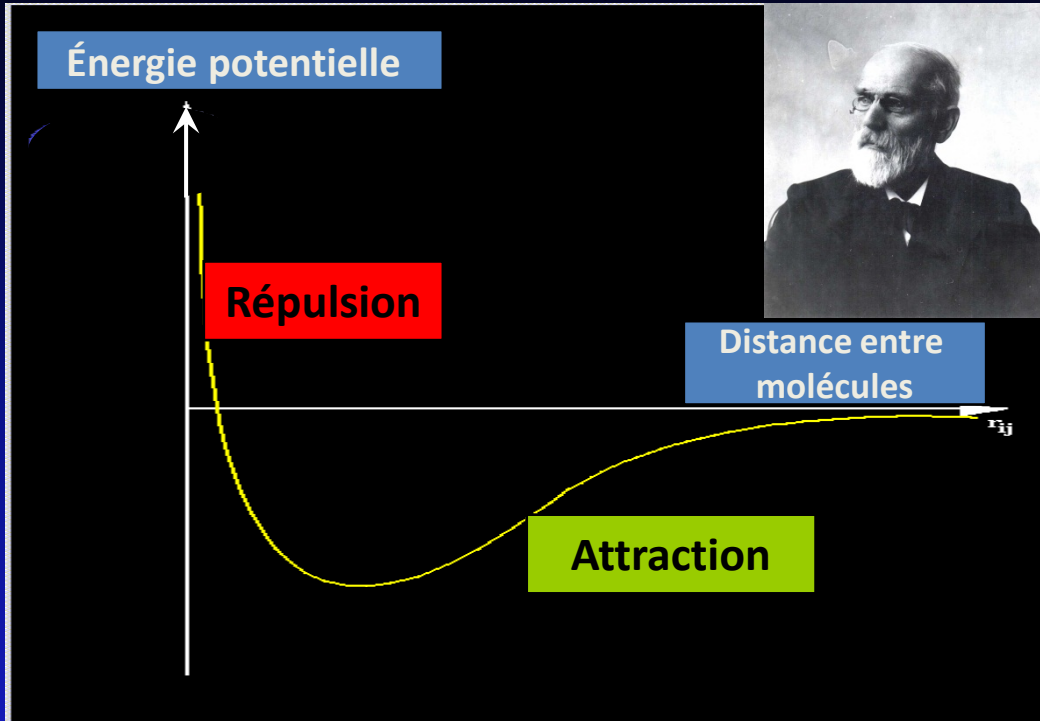
I. CARACTERES GENERAUX DES SYMETRIES BRISEES

Des transitions réversibles entre phases peuvent être observées

- ❖ à la limite thermodynamique
- ❖ à paramètres intensifs fixés (P, T, H, E, \dots)

A l'origine de ces phénomènes se trouvent les interactions entre entités constituant le système, qui peuvent favoriser différents états d'équilibre macroscopique.

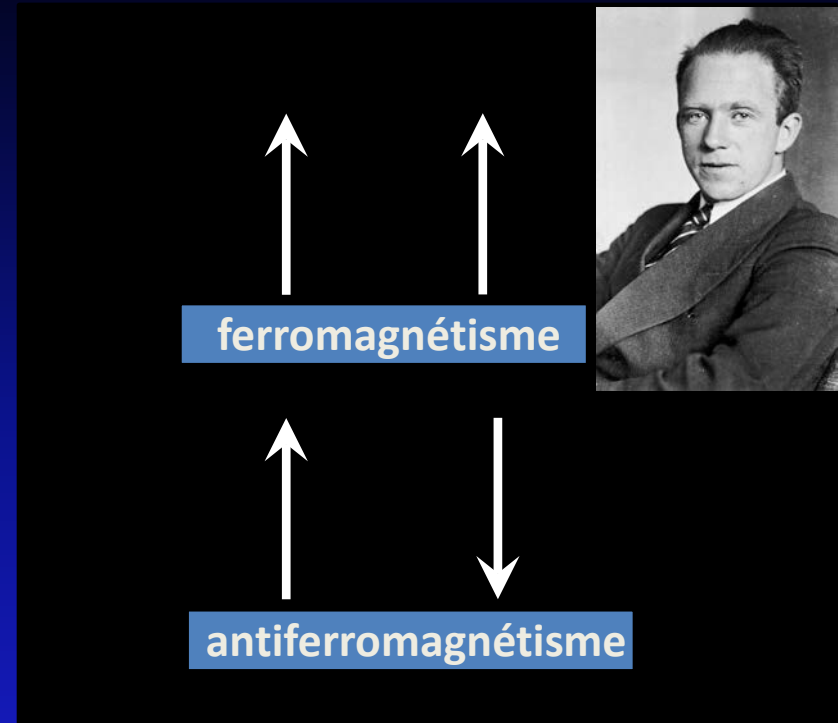
Potentiel Lennard-Jones entre molécules d'un fluide non polaire



$$u(r) = -a/r^6 + b/r^{12}$$

$$(a, b > 0)$$

Interaction d'échange Heisenberg entre spins classiques



$$H = - \sum_{ij} J_{ij} (s_i \cdot s_j)$$

$J_{ij} > 0 (< 0)$ ferro (antiferro)

Energie



Entropie

L'entropie s'oppose à l'établissement de l'ordre

$$F=E-TS \quad \text{ou} \quad G=H-TS$$

I. A Classification zoologique d'Ehrenfest.



Lorsque la dérivée d'ordre n du potentiel chimique par rapport aux variables intensives est discontinue en un point, sur une ligne,.... du diagramme de phase dans l'espace des paramètres intensifs, on a affaire à une transition de phase d'ordre n .

$$\mu = G/N \text{ ou } G/M$$

$n = 1 \Rightarrow$ transition du premier ordre (ex. liquide-gaz; coexistence de phases possibles)

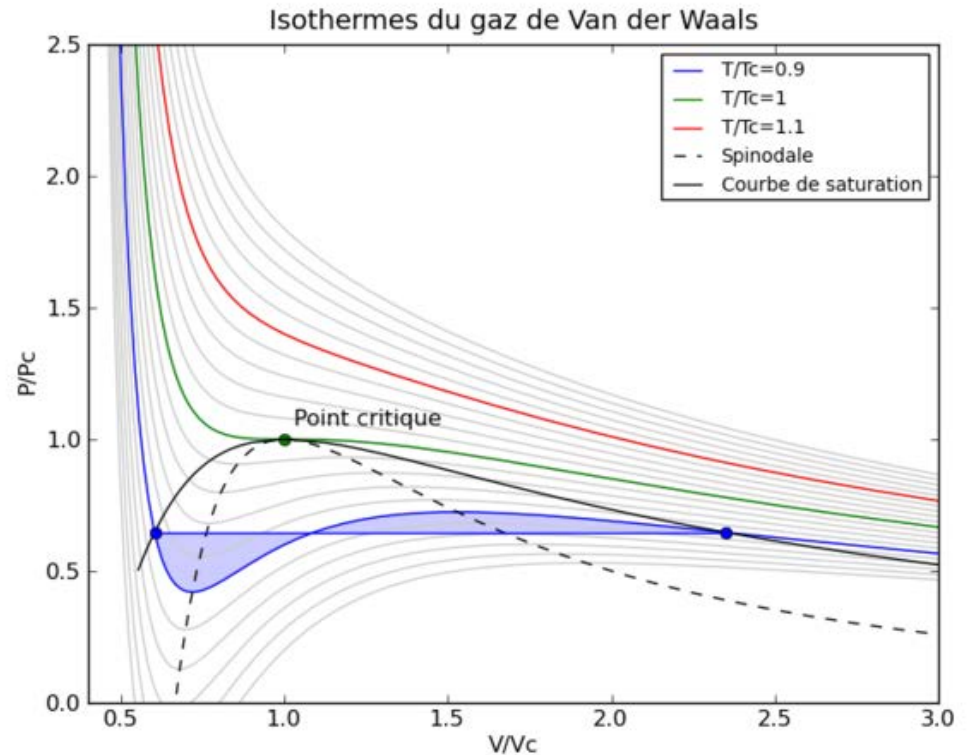
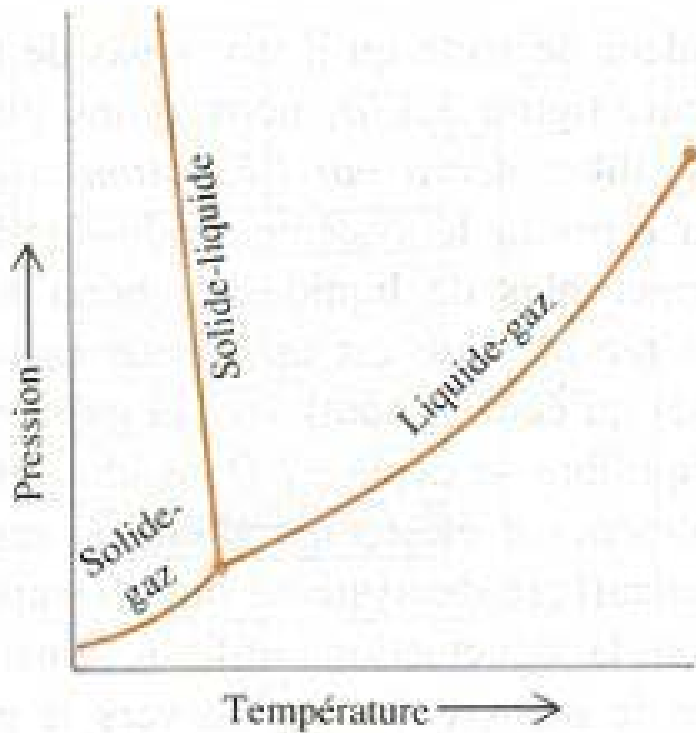
$n = 2 \Rightarrow$ transition du deuxième ordre (ex. paramagnétique-ferromagnétique; une phase disparaît au profit d'une autre)

$n = 3 \Rightarrow$ transition du troisième ordre (ex. condensation de Bose)

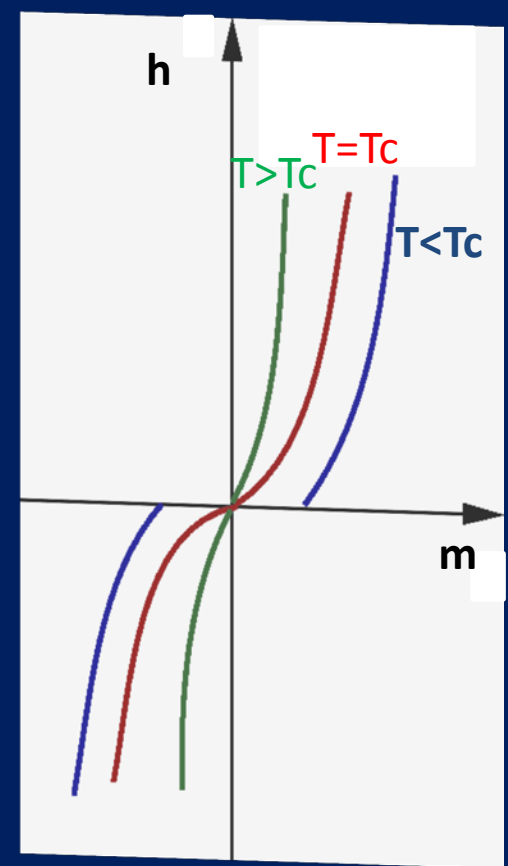
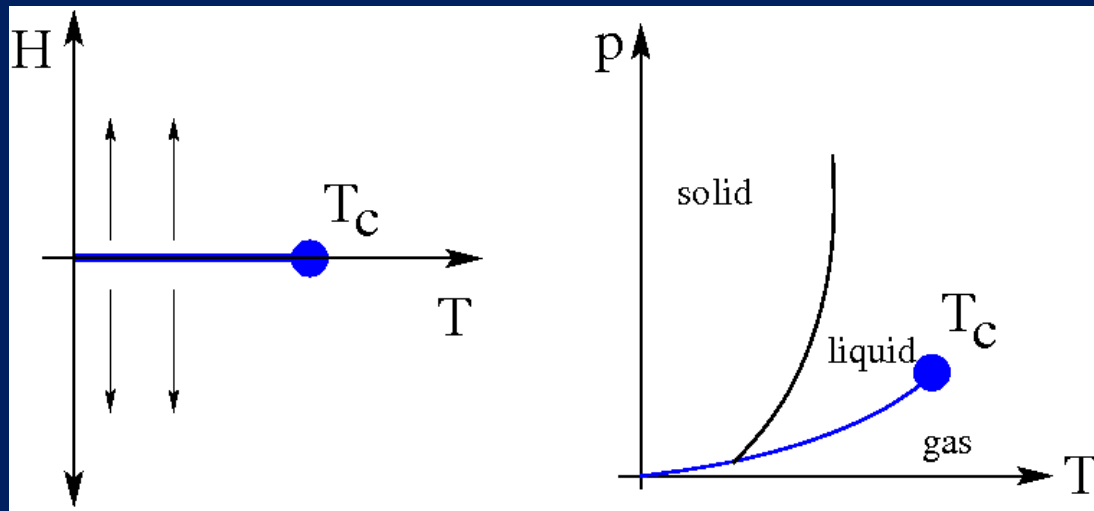
.....

$n = \infty \Rightarrow$ transition d'ordre infini (Berezinskii-Kosterlitz-Thouless)

$$d\mu = -s dT + \frac{1}{\rho} dp$$



$$d\mu_1 = d\mu_2 \rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta(1/\rho)} = \frac{dp}{dT}$$

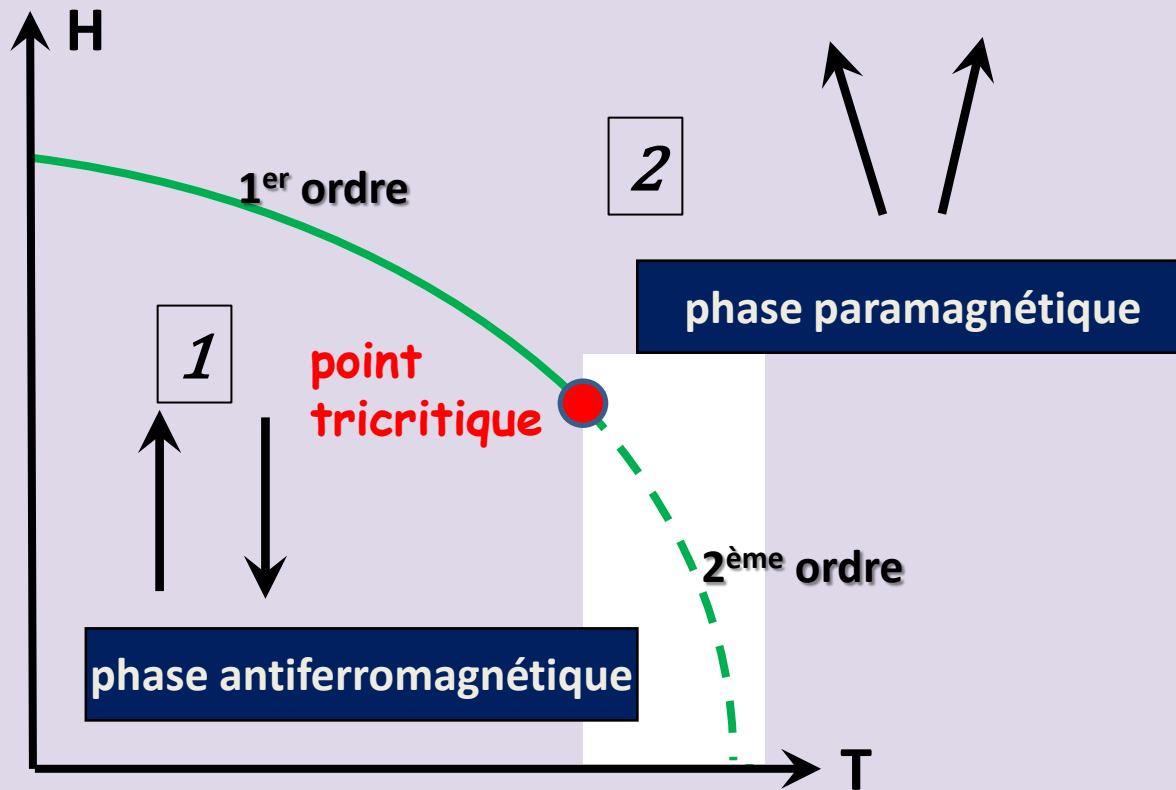


$$d\mu = -s dT - m dh$$

$$d\mu_1 = d\mu_2 \text{ ET } dh=0 (T < T_c) \rightarrow s_1 = s_2$$

symétrie des 2 phases

$$d\mu = -s dT - m dh$$



[retour 1](#)

[retour 2](#)

Le long de la ligne de transition du 2^{ème} ordre

$$\frac{dH}{dT} = \frac{C_1 - C_2}{l_2 - l_1} = \frac{1}{T} \frac{l_1 - l_2}{(\chi_2 - \chi_1)} \quad \chi = \left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T \quad ; \quad l = T \left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_H$$

Variables relatives aux systèmes de fluides vs relatives aux systèmes magnétiques

P

h

V

$-M = -Nm$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$$

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial h}$$

$$A = A(N, V, T)$$

$$A = A(N, M, T)$$

$$G = A + PV(P)$$

$$G = A - hM(h)$$

$$P = -\frac{\partial A}{\partial V}$$

$$h = \frac{\partial A}{\partial M}$$

$$V = \frac{\partial G}{\partial P}$$

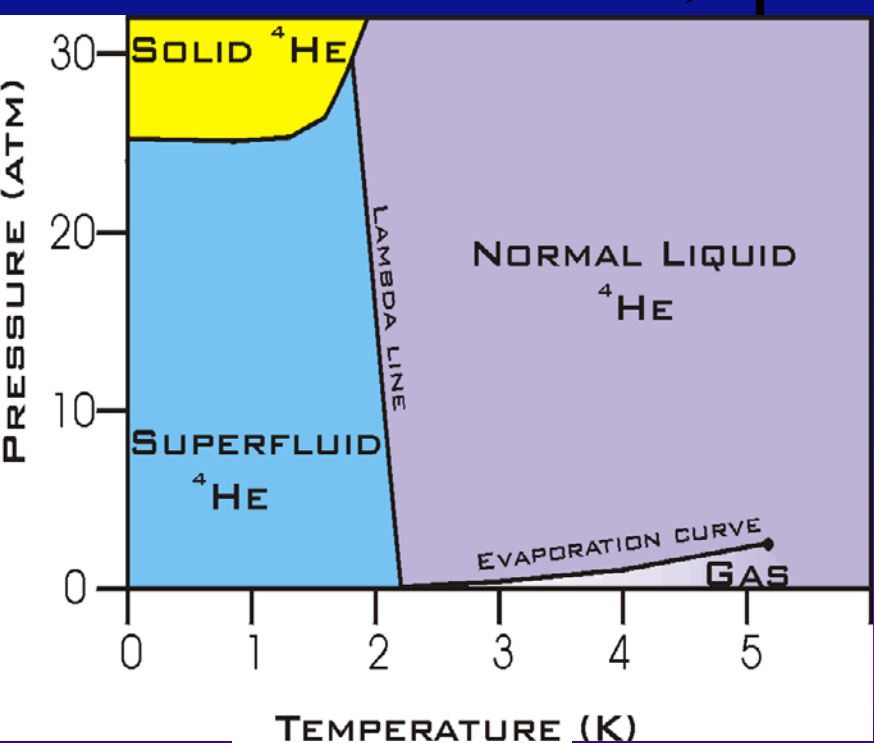
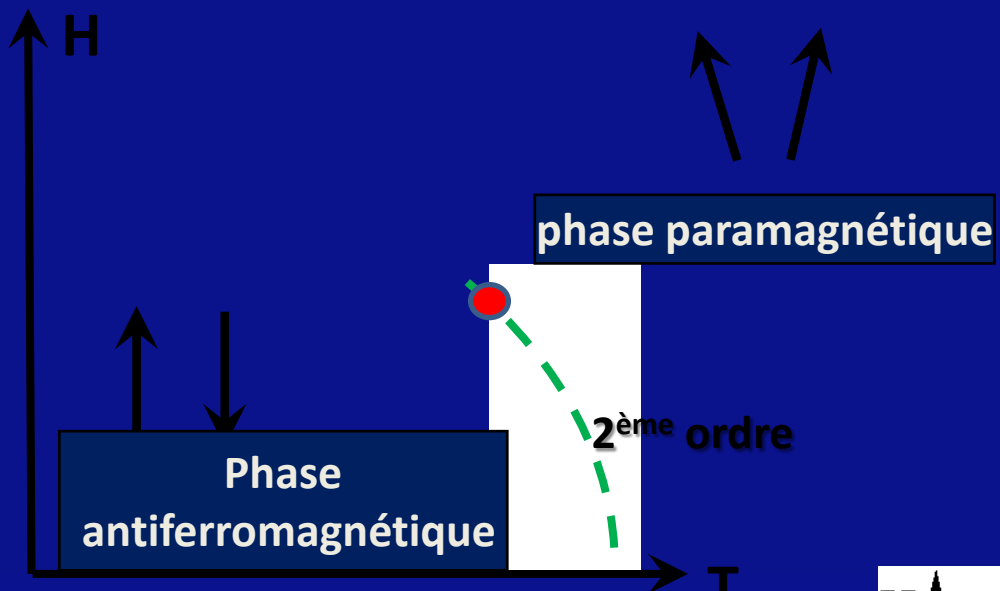
$$M = -\frac{\partial G}{\partial h}$$

$$C_V = -T \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_V$$

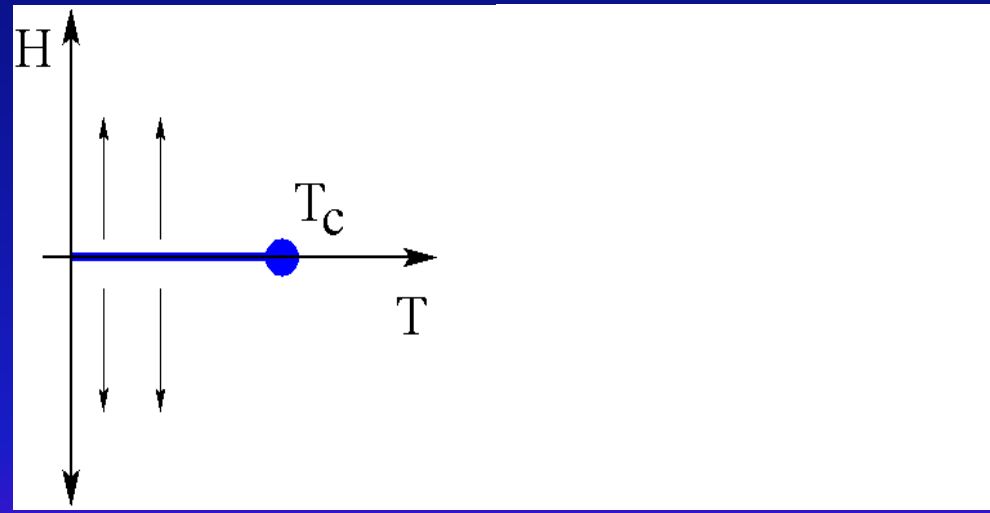
$$C_M = -T \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_M$$

$$C_P = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_P$$

$$C_h = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_h$$



Suprafluidité



Transitions de phases distinctes selon Ehrenfest

Transitions de phases identiques selon Ehrenfest

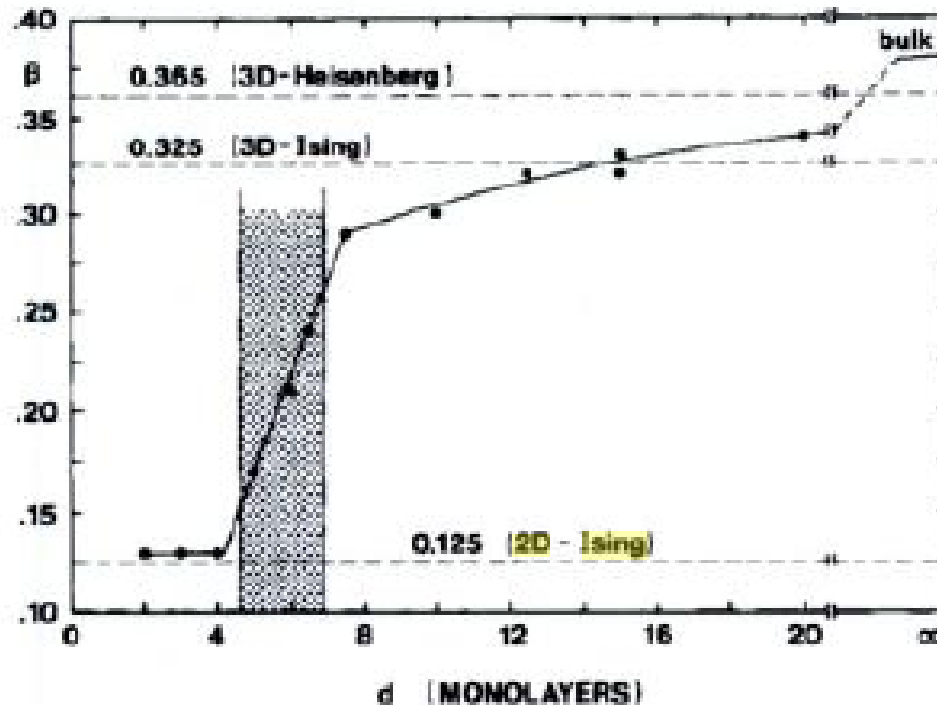
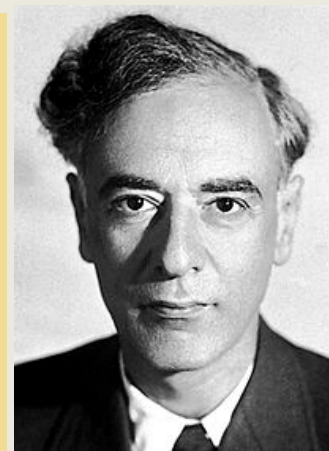


Fig. 4.8. Critical exponent β as a function of film thickness for Ni(111)/W(110).



I. B Concept de symétries brisées: symétrie rime (généralement) avec entropie.

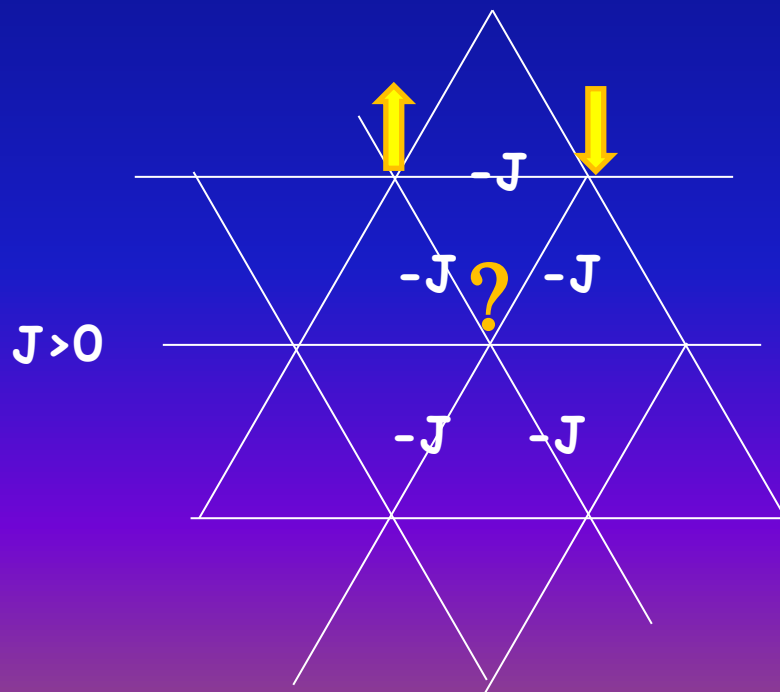
- symétries globales continues
- symétries locales de jauge continues
- symétries discrètes



Curie-Landau observent que les transitions de phases sont souvent associées à une brisure de symétrie :

- les symétries de la phase « basse température » forment un sous-groupe du groupe des symétries de la phase « haute température ».
- la brisure de symétrie se manifeste par l'apparition d'un paramètre d'ordre qui est nul dans la phase « haute température » et non-nul dans la phase « basse température ». Cette grandeur extensive se transforme comme une représentation irréductible du groupe de symétrie de la phase « haute température ». Si l'apparition est (dis-)continue, la transition de phase est du (1^{er})2^{ème} ordre.
- si le groupe de symétrie de la phase « basse température » n'est pas contenu dans celui de la phase « haute température », la transition de phase est généralement du premier ordre (ex. liquide-gaz, solide-gaz, sol-liqu, variétés polymorphes du soufre).

Parfois on a des transitions de phases continues sans paramètre d'ordre :
e.g Berezinskii-Kosterlitz-Thouless, transition de localisation d'Anderson,
transition de Mott, effet Hall quantique.



Parfois on a des transitions de phases
dont le paramètre d'ordre ne se
déduit pas directement des symétries
« visibles » du système :
cas des systèmes frustrés
géométriquement.

Parfois les transitions impliquent plusieurs variables thermodynamiques : e.g BaTiO_3 où l'instabilité de structure s'accompagne de ferroélectricité, les multiferroïques, VO_2 où l'instabilité de structure donne des transitions métal-isolant.

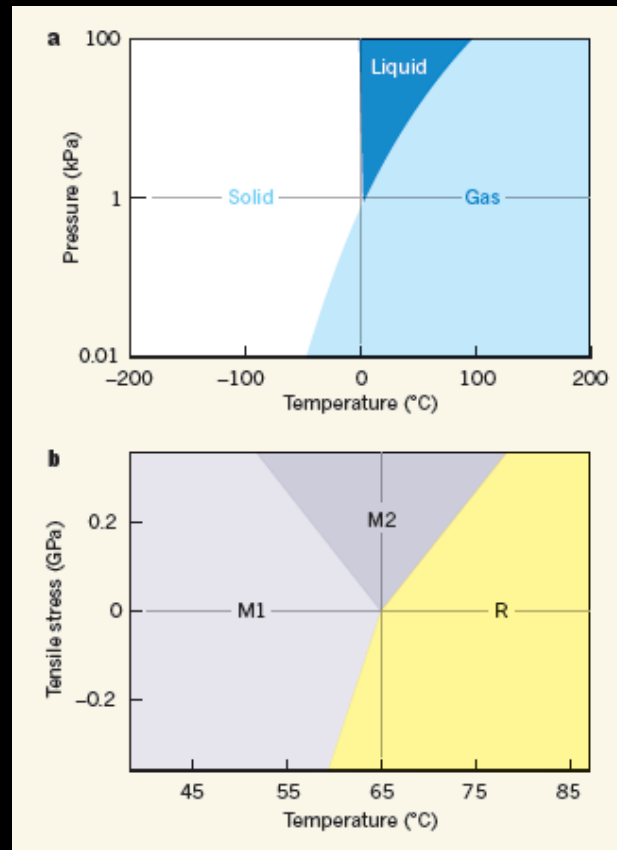
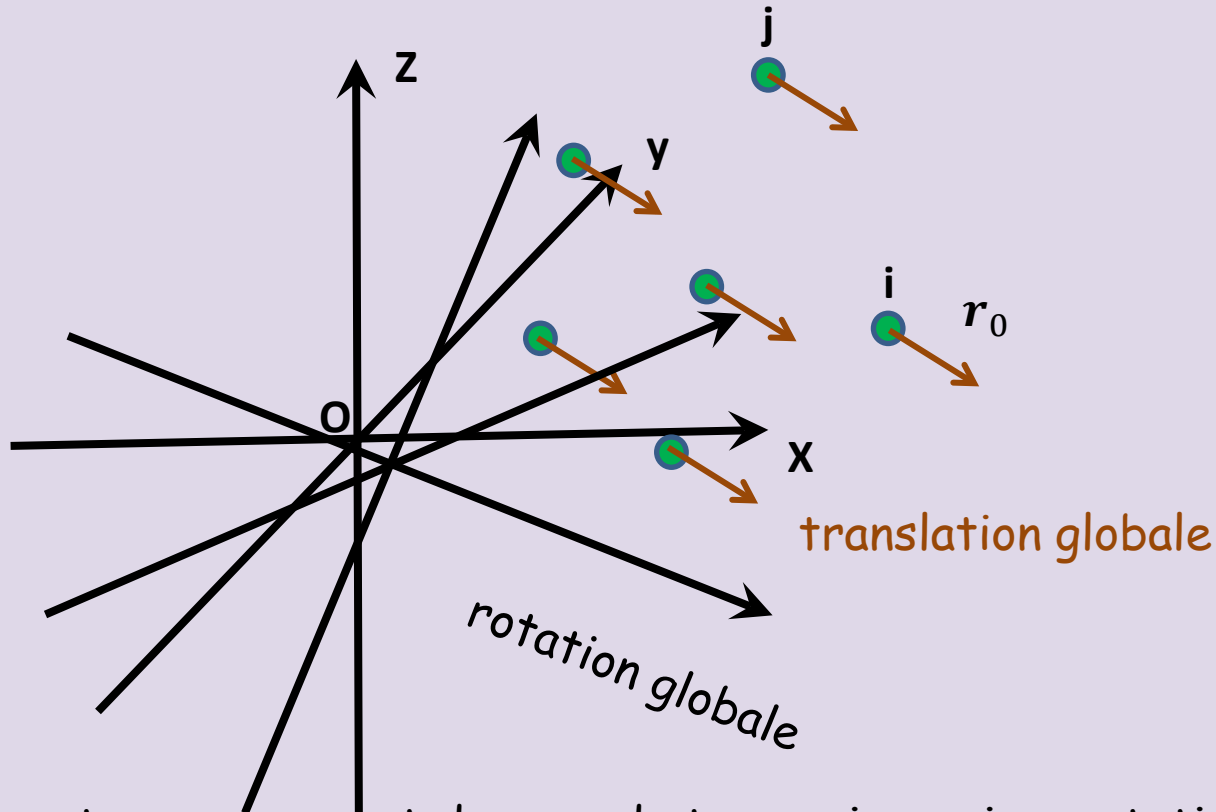


Figure 1 | Phase transitions with triple points. a, The phase diagram of water. At only one pressure and temperature can solid, liquid and gaseous water coexist in equilibrium. This triple point defines the Kelvin temperature scale. b, Park *et al.*¹ have mapped the phase diagram of vanadium dioxide. The triple point at zero tensile stress and the slopes of the phase boundaries greatly constrain theories that seek to understand the transitions from metal (R) to insulator (M1 or M2) in this material. Part b is based on Fig. 4b of the paper.

Symétries continues globales



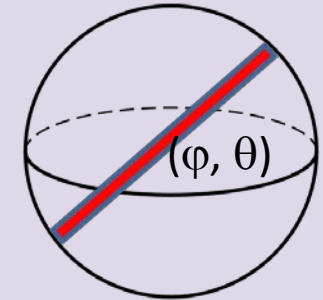
Translation et renversement du sens du temps; inversion; rotations

$$H = \sum_i \frac{P_i^2}{2m} + \sum_{ij} U(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad \mathbf{r}_i \rightarrow -\mathbf{r}_i ; t \rightarrow -t ; t \rightarrow t + t_0$$

Cristal ou modulation périodique de la densité dans une direction de l'espace brise translations et rotations continues; fluide en rotation brise invariance par renversement du sens du temps.

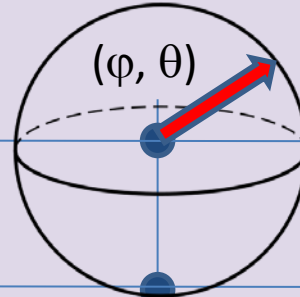
Symétries continues locales

- Associées à une loi de conservation (dite de jauge) : $U(1)$
 - nombre de particules, cas d'un suprafluide.
 - charge, cas d'un supraconducteur.
- Cristal liquide nématique : $SO(3)$
- Spins sur réseau : $O(2), O(3)$



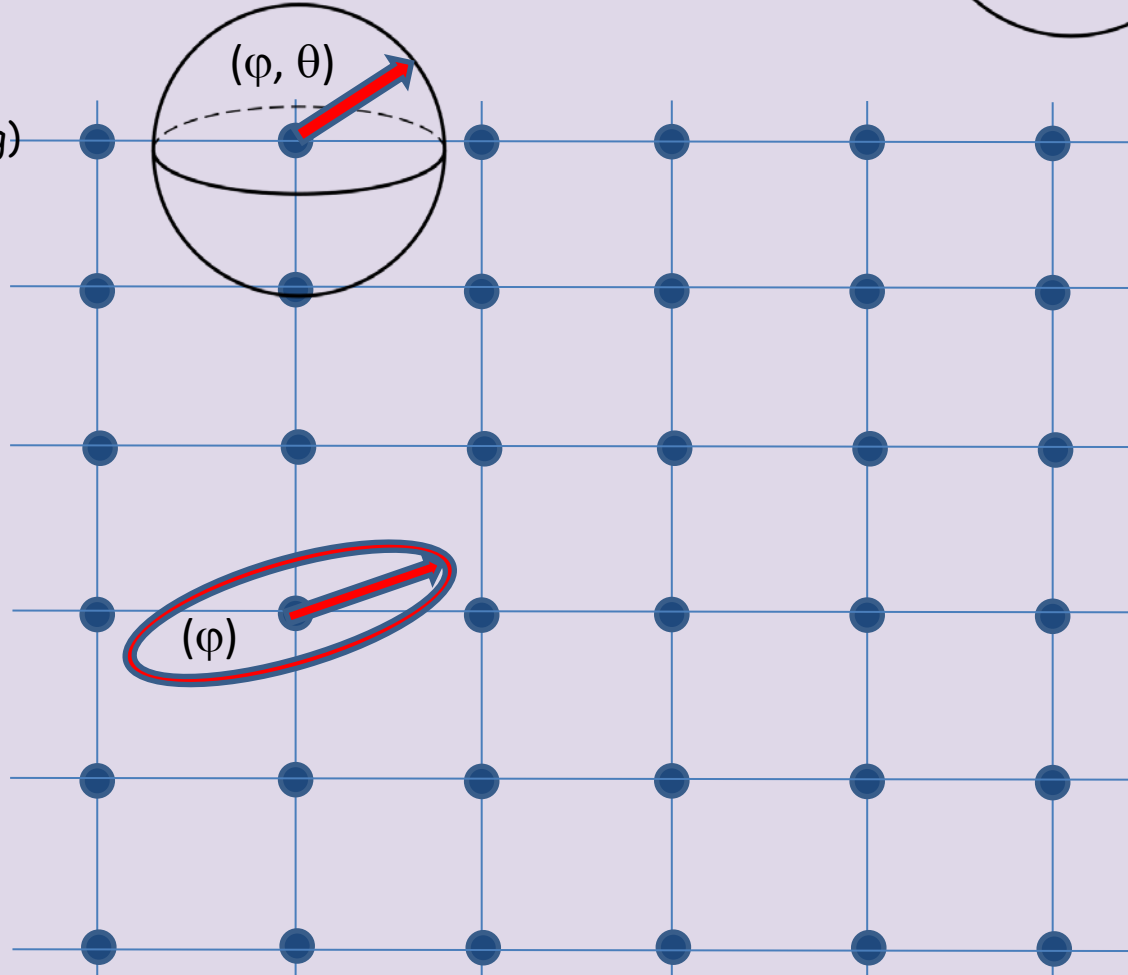
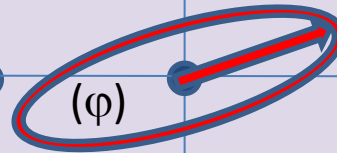
$$n^2 = 1$$

Spin classique à trois
composantes (Heisenberg)



$$S^2 = 1$$

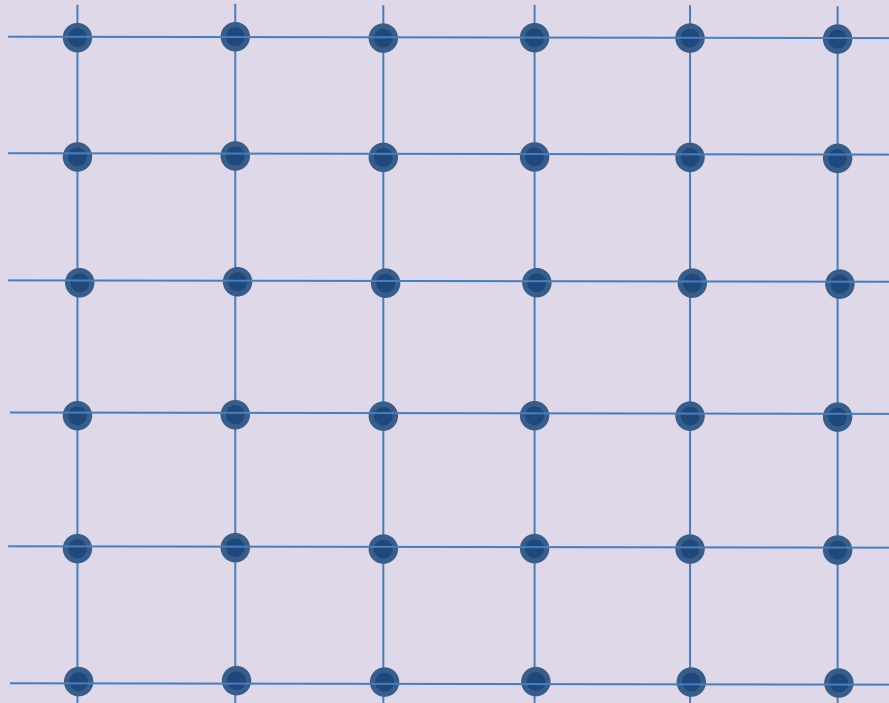
Spin classique à deux
composantes (XY)



Symétries discrètes globales

○ Groupes de symétries des cristaux

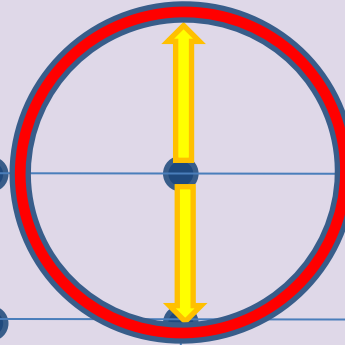
- Symétries ponctuelles : rotation, réflexions par rapport à des plans ou axes, inversion (32 éléments à 3D).
- Symétries ponctuelles + translations (230 éléments à 3D).
- Groupes magnétiques incluant la symétrie par renversement du sens du temps (1651 éléments à 3D).



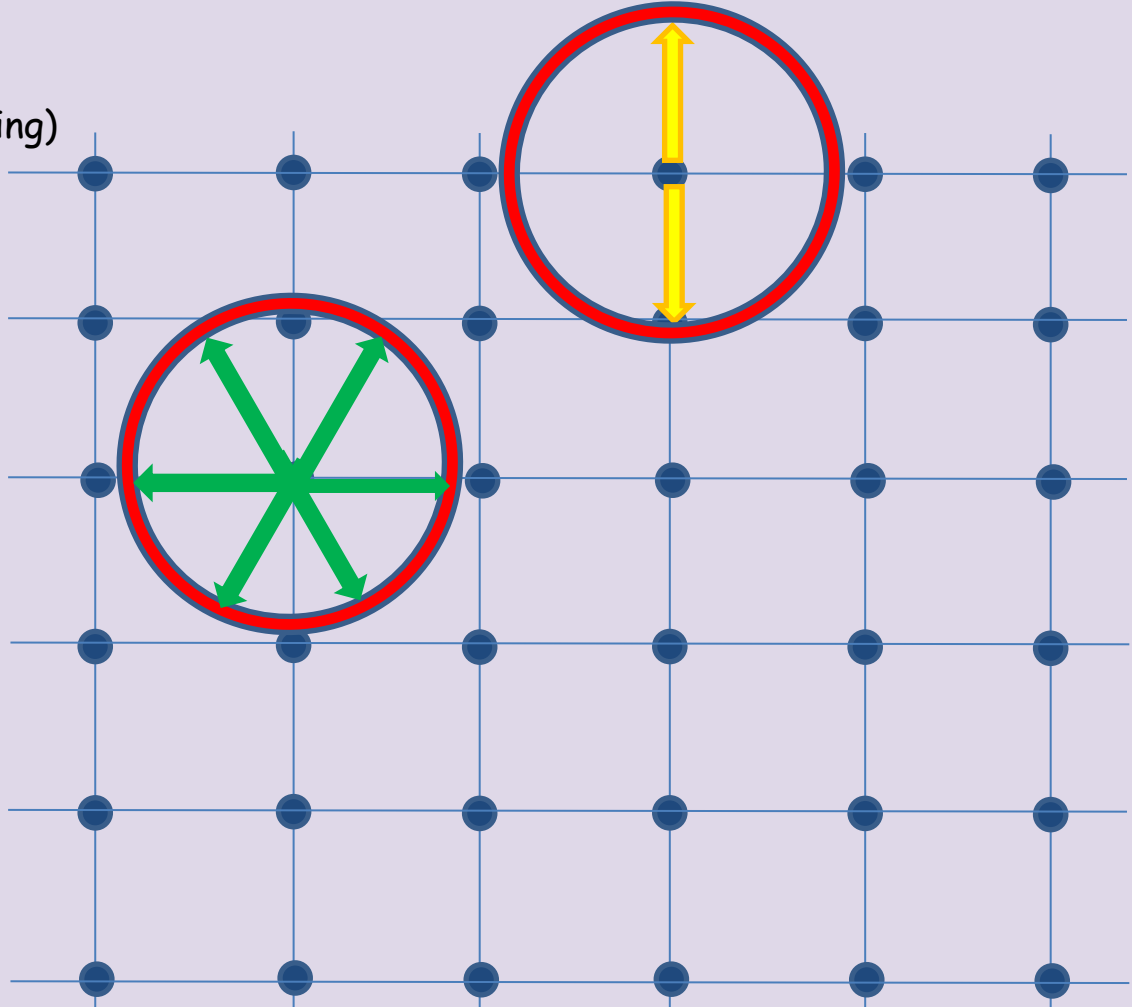
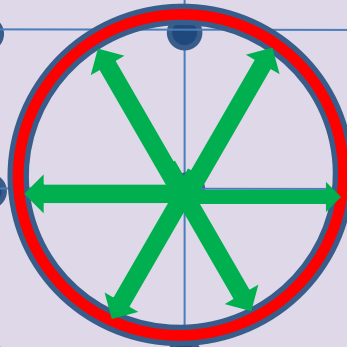
Symétries discrètes locales

Spins sur réseau : $Z(n)$ contient l'inversion (invariance sous $t \rightarrow -t$) ; Ising $\rightarrow n=2$

Spin classique à 2 états (Ising)



Spin classique à n états ($Z(n)$)



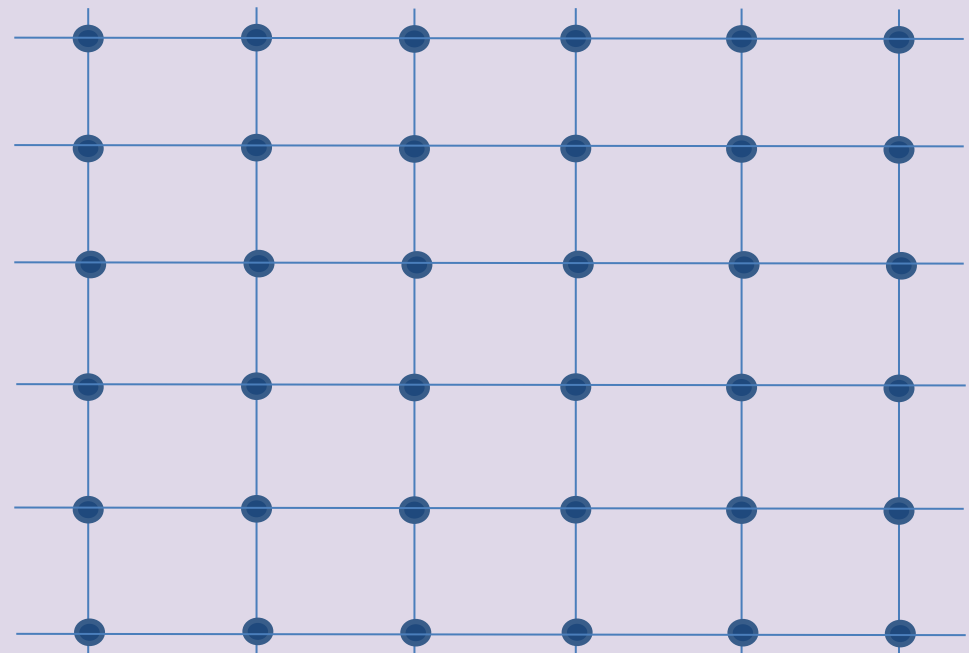
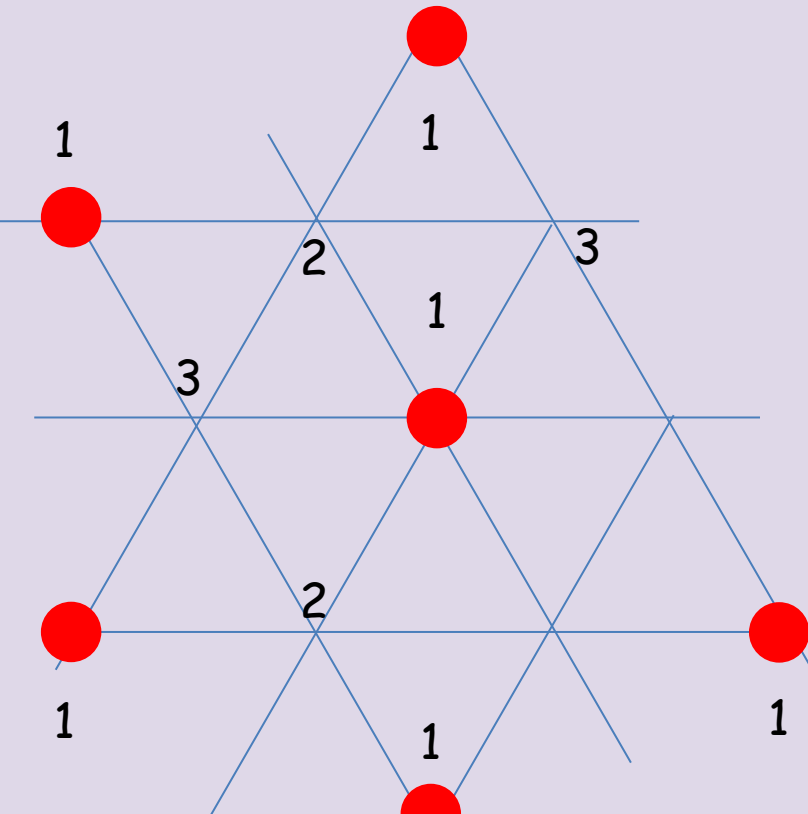
Symétries discrètes locales

Modèle de Potts sur réseau : n états

ex : monocouche de krypton adsorbé sur du graphite; au remplissage $1/3$, l'effet stérique favorise l'occupation des sites 2^{ème} voisins.



3 états



I. C Introduction d'un paramètre d'ordre

- quantifie les brisures de symétrie précédentes

Spins Heisenberg: ordre dans une direction z :

$$s_z = \frac{1}{N} \sum_i S_{i,z} \quad (N \rightarrow \infty) \quad \text{ou} \quad s_z = \frac{1}{V} \sum_i S_{i,z} \quad (V \rightarrow \infty) \quad (\text{densité})$$

brise $t \rightarrow -t$ et rotations faisant tourner l'axe z ($O(3) \rightarrow O(2)$)

Nématique: ordre dans une direction θ par rapport à l'axe z :

$$\langle (\cos^2(\theta) - 1/3) \rangle_{\text{sphère unité}} ; \langle (\cos^2(\varphi)) \rangle_{\text{sphère unité}} = \frac{1}{2}$$

brise les rotations faisant tourner l'axe portant le directeur n .

Potts à deux états (« Ising »); Réseau bipartite de sites A et B; C_A (C_B) est l'écart de concentration par rapport à 50% d'un atome de Cu (Zn) sur A (B) pour CuZn:

$$C_A + C_B$$

brise la symétrie d'occupation des sites A par Cu ou Zn.

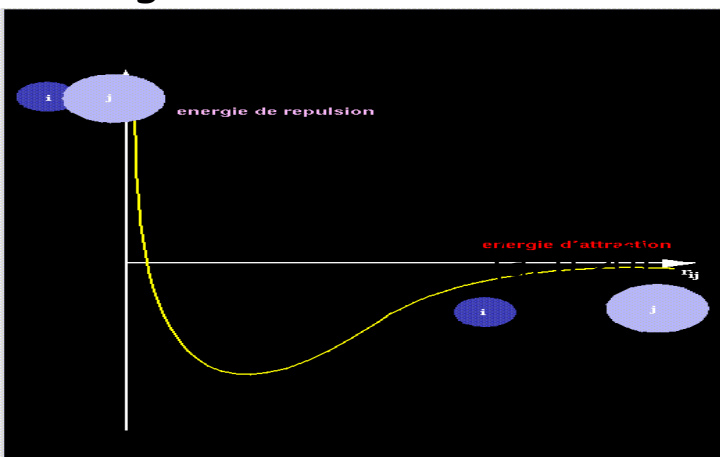
II. THERMODYNAMIQUE LORS D'UNE BRISURE DE SYMÉTRIE

II. A Champ moyen de Weiss

II. A1 Equation d'état de Van der Waals

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{ij} U(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)$$

Si les N molécules du fluide contenu dans l'enceinte de volume V sont **réparties de façon homogène et isotrope, en moyenne**, un volume $dV = 4\pi r^2 dr$ en contient $dN = \frac{N}{V} dV$. L'énergie interne contient la contribution cinétique (gaz parfait) plus une correction



$$u(r) = -a/r^6 + b/r^{12} \quad a, b > 0$$

$$E_{int} = N \int_{\sigma}^{\infty} u(r) \frac{N}{V} dV \equiv -\frac{N^2}{V} a'$$

La pression attractive liée aux interactions est $\frac{\partial E_{int}}{\partial V}$ et cause le changement d'état.

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - \sigma) = NRT$$

II. A Champ moyen de Weiss



II. A2 Cas des spins sur réseau

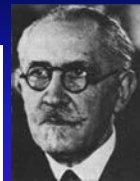
$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j)$$
$$J > 0$$



ferromagnétisme

Interactions premiers voisins :
chaque spin S_i voit un environnement moyen
 $s_z = \frac{1}{N} \sum_i S_{i,z}$ de ses z voisins soit un champ
moyen $B_m = z J s_z / g \mu_B$ indépendamment du champ
extérieur appliqué, $h_{0,z}$ qui oriente les spins
selon z et que l'on fait tendre vers zéro une fois
prise la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$

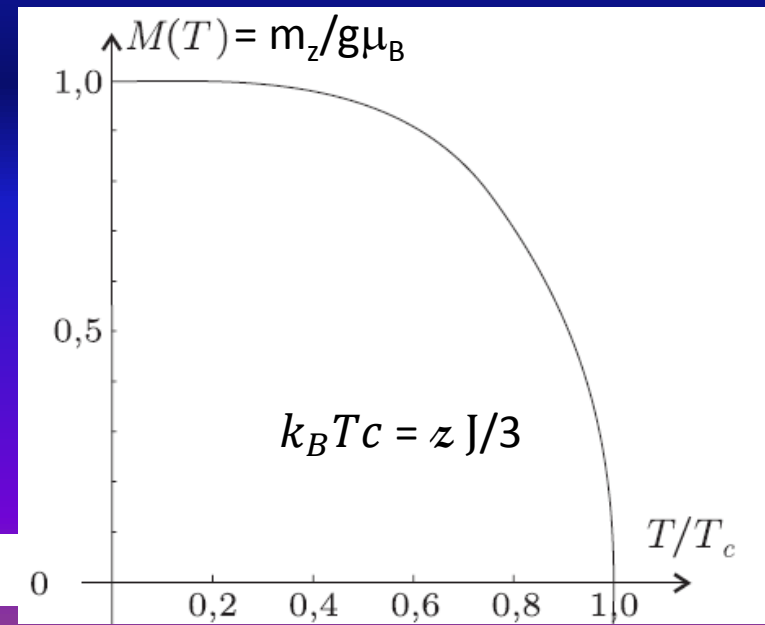
La loi de Langevin donne l'aimantation
thermique du système



$$m_z = g \mu_B s_z = g \mu_B L(\beta g \mu_B B_m)$$

où $L(x) = \coth(x) - 1/x$

Transition du 2^{ème} ordre



II. A Champ moyen de Weiss

II. A2 Cas des spins sur réseau (suite)

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j)$$

$J > 0$



ferromagnétisme

$\mathbf{S}_i = S_i - s_z \mathbf{u}_z + s_z \mathbf{u}_z = s_z \mathbf{u}_z + \delta \mathbf{S}_i$. On néglige $\delta \mathbf{S}_i \cdot \delta \mathbf{S}_j$ dans H . On a alors un problème de spins indépendants plongés dans un champ moyen. On calcule la fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\varphi, \theta\}} \exp - \beta H$$

à la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$

$$m_z = g \mu_B s_z = g \mu_B L(\beta g \mu_B B_m)$$

où $L(x) = \coth(x) - 1/x$

Près de T_c ,

$$f = \frac{1}{2} \frac{zJ}{(g\mu_B)^2} \left[m_z^2 \left(1 - \frac{\beta z J}{3} \right) + m_z^4 \frac{3}{10 g^2 \mu^2} \right]$$

II. B Energie libre de Landau au voisinage de T_c

II. B1 Construction sur un cas particulier

Landau postule que, au voisinage d'une transition de phase, l'énergie libre du système s'exprime sous la forme d'un polynôme du paramètre d'ordre.

$$f(T, X, m) = f(T, X) + a m^2 + b m^3 + c m^4 + \dots$$

- Pas de termes linéaires : f possède les symétries de la phase « haute température » où $m=0$.

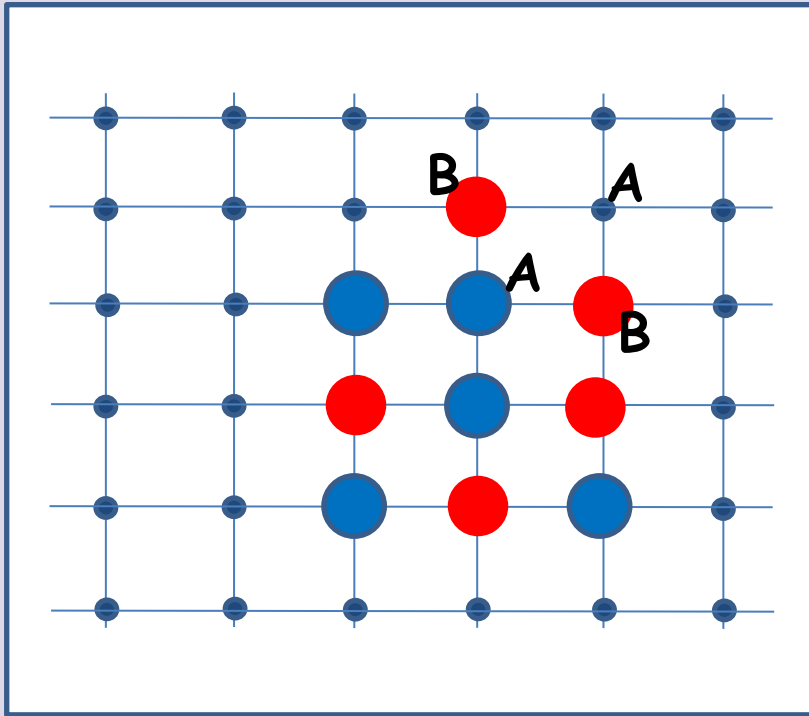


- La transition se produit à paramètres intensifs fixés (cf plus loin)

Energie libre de Landau de CuZn près de T_c

Cu 

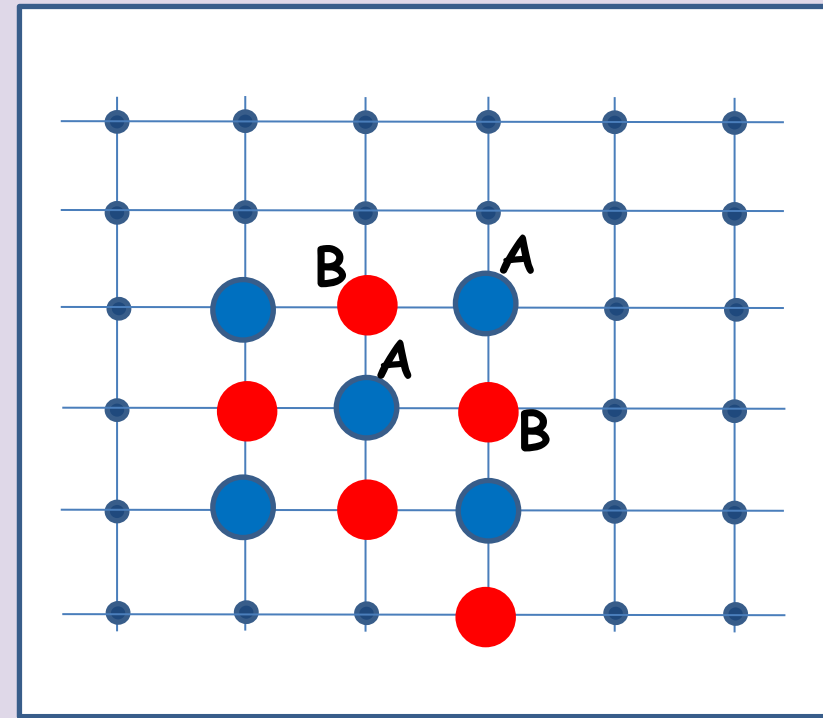
Zn 



$T > T_c$

$$C_A = \frac{N_{Cu(A)}}{N_A} - 0.5$$

$$C_B = \frac{N_{Zn(B)}}{N_B} - 0.5$$

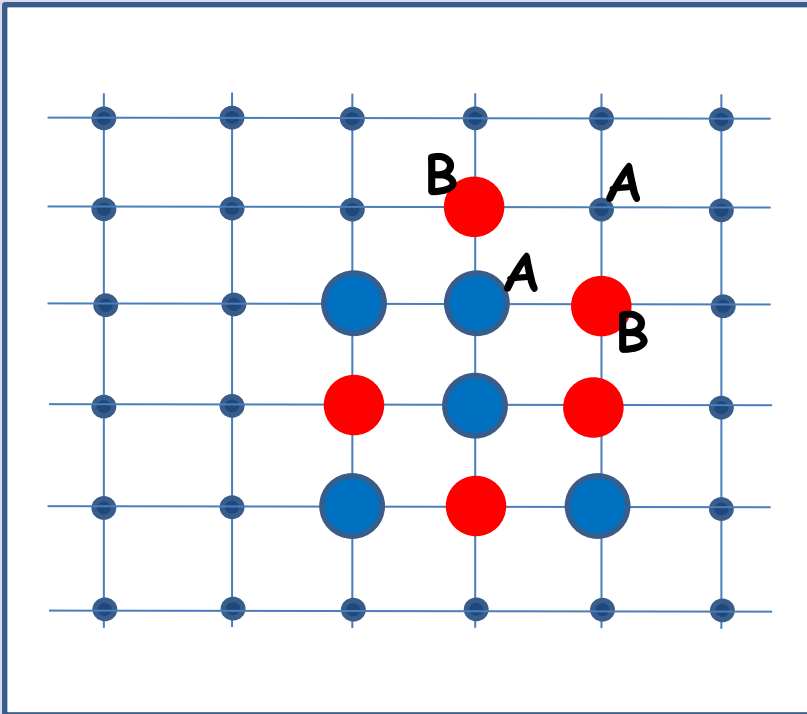


$T < T_c$

Energie libre de Landau de CuZn près de T_c

Cu 

Zn 



$T > T_c$

Symétries

identité

$$e : C_A \rightarrow C_A, C_B \rightarrow C_B$$

échange A, B

$$a : C_A \rightarrow C_B, C_B \rightarrow C_A$$

excès Cu sur A

$$b : C_A \rightarrow -C_A, C_B \rightarrow -C_B$$

échange excès

$$c=ab : C_A \rightarrow -C_B, C_B \rightarrow -C_A$$

$$C_A = \frac{N_{Cu(A)}}{N_A} - 0.5$$

$$C_B = \frac{N_{Zn(B)}}{N_B} - 0.5$$

Energie libre de Landau de CuZn près de Tc

Symétries

identité

$$e : C_A \rightarrow C_A, C_B \rightarrow C_B$$

échange A, B

$$a : C_A \rightarrow C_B, C_B \rightarrow C_A$$

excès Cu sur A

$$b : C_A \rightarrow -C_A, C_B \rightarrow -C_B$$

échange excès $c=ab : C_A \rightarrow -C_A, C_B \rightarrow -C_B$

$$C_A = \frac{N_{Cu(A)}}{N_A} - 0.5$$

$$C_B = \frac{N_{Zn(B)}}{N_B} - 0.5$$

e, a, b, c est le groupe de symétrie de la phase haute température

e	a	b	c	irrep
1	1	1	1	$1, C_A^2 + C_B^2, C_A C_B$
1	-1	-1	1	$C_A - C_B$
1	-1	1	-1	$C_A^2 - C_B^2$
1	1	-1	-1	$C_A + C_B$

Energie libre de Landau de CuZn près de T_c

e	a	b	c	irrep
1	1	1	1	$1, C_A^2 + C_B^2, C_A C_B$
1	-1	-1	1	$C_A - C_B$
1	-1	1	-1	$C_A^2 - C_B^2$
1	1	-1	-1	$C_A + C_B$

$$C_A = \frac{N_{Cu(A)}}{N_A} - 0.5 \quad C_B = \frac{N_{Zn(B)}}{N_B} - 0.5$$

$$f(T, X, C_A, C_B) = f(T, X) + a_1(C_A^2 + C_B^2) + 2a_2 C_A C_B + \dots$$

$$= f(T, X) + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(C_A + C_B)^2 + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)(C_A - C_B)^2 + \dots$$

Pas de termes linéaires (non invariants)

$$T > T_c \rightarrow a_1 + a_2 > 0 \text{ ET } a_1 - a_2 > 0$$

$$T = T_c \rightarrow a_1 + a_2 = 0 \text{ et } a_1 - a_2 > 0$$

$$T < T_c \rightarrow a_1 + a_2 < 0 \text{ et } a_1 - a_2 > 0$$

Energie libre de Landau près de T_c : transition du 2^{ème} ordre

Ferromagnétique

groupe de symétrie initial $O(3)$;
brisure $t \rightarrow -t$ i.e. $m \rightarrow -m$

$$\text{paramètre d'ordre } m = \frac{g\mu_B}{V} \sum_i S_i$$

énergie libre par unité de volume :

$$f(T, X, m) = f(T, X) + a_0(T-T_c) m^2 + b(m^2)^2 + \dots$$

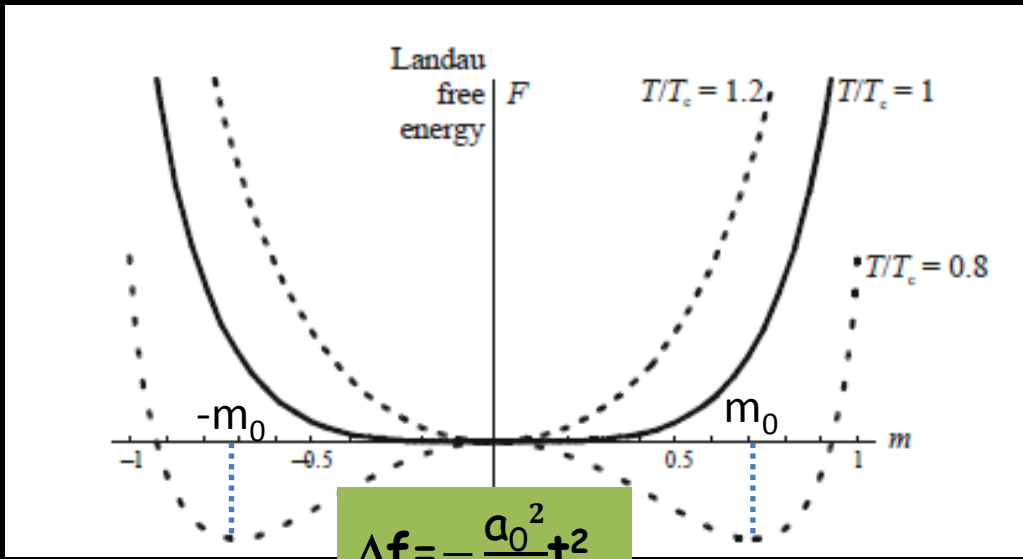
(pas de termes cubiques)

$$h = \frac{\partial f}{\partial m} = 0$$

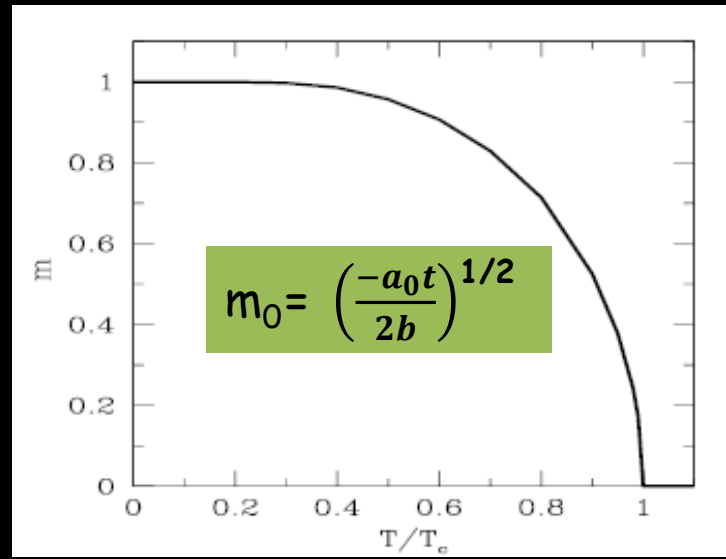
(pour la transition de phase)

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial m_i \partial m_j} \right| \geq 0$$

(pour la stabilité de l'état thermodynamique)



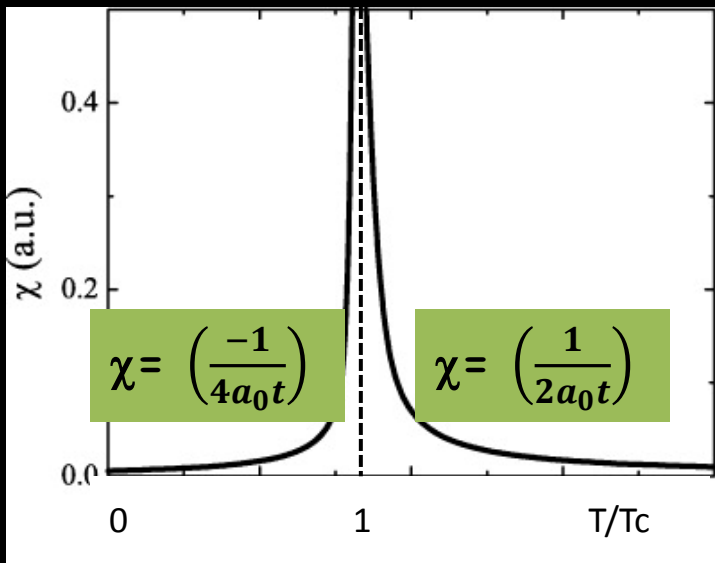
$$\Delta f = -\frac{a_0^2}{4b^2} t^2$$



$$m_0 = \left(\frac{-a_0 t}{2b} \right)^{1/2}$$

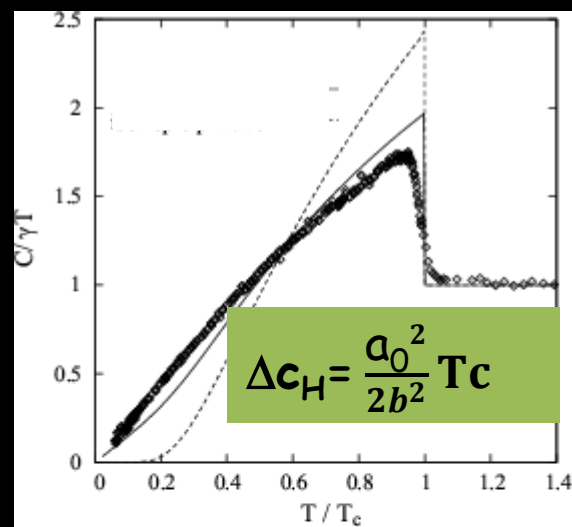
$$a_0(T - T_c) m^2 + b(m^2)^2$$

$$t = T - T_c$$



$$\chi = \left(\frac{-1}{4a_0 t} \right)$$

$$\chi = \left(\frac{1}{2a_0 t} \right)$$



$$\Delta C_H = \frac{a_0^2}{2b^2} T_c$$

Exposants critiques de champ moyen

grandeur	comportement $T \geq T_c$	comportement $T \leq T_c$
Δc_H	$\dagger^{-\alpha}$	$(-\dagger)^{-\alpha'}$
m_0	-	$(-\dagger)^\beta$
χ	$\dagger^{-\gamma}$	$(-\dagger)^{-\gamma'}$
ξ	$\dagger^{-\nu}$	$(-\dagger)^{-\nu'}$

$$m_0(T_c) \sim \text{sign}(H)H^{1/\delta}$$

$\alpha = \alpha'$	0
β	1/2
$\gamma = \gamma'$	1
δ	3

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

← cf relation thermodynamique d'Ehrendfest pour une transition du 2^{ème} ordre

Energie libre de Landau près de T_c : transition du 1^{er} ordre

Modèle de Potts

groupe de symétrie initial $P(s)$
(permutations de s objets);

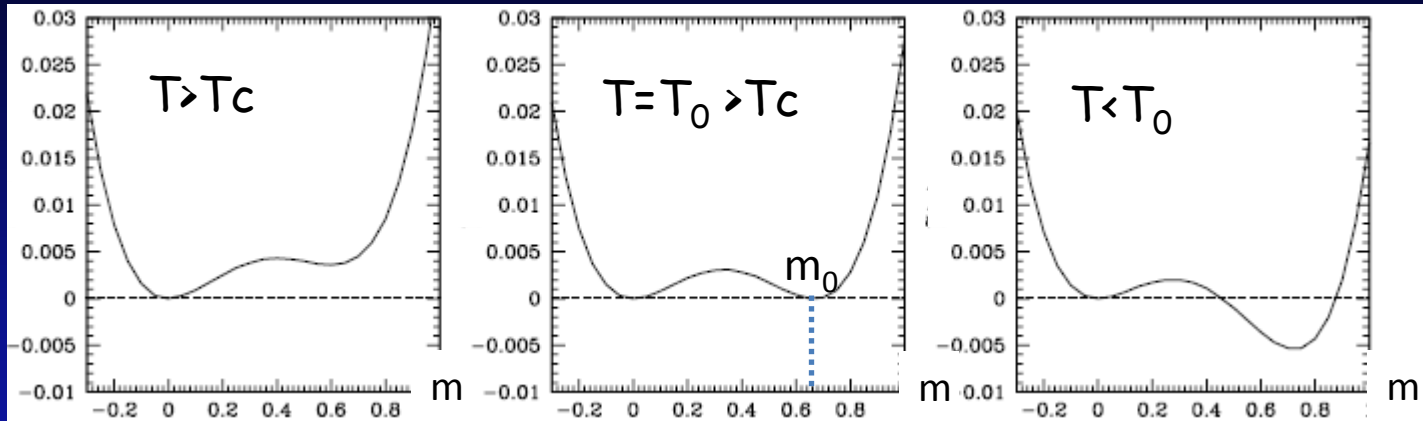
$$\text{paramètre d'ordre } m = \frac{1}{(s-1)} (s\delta_{\sigma,1} - 1)$$

énergie libre par unité de volume :

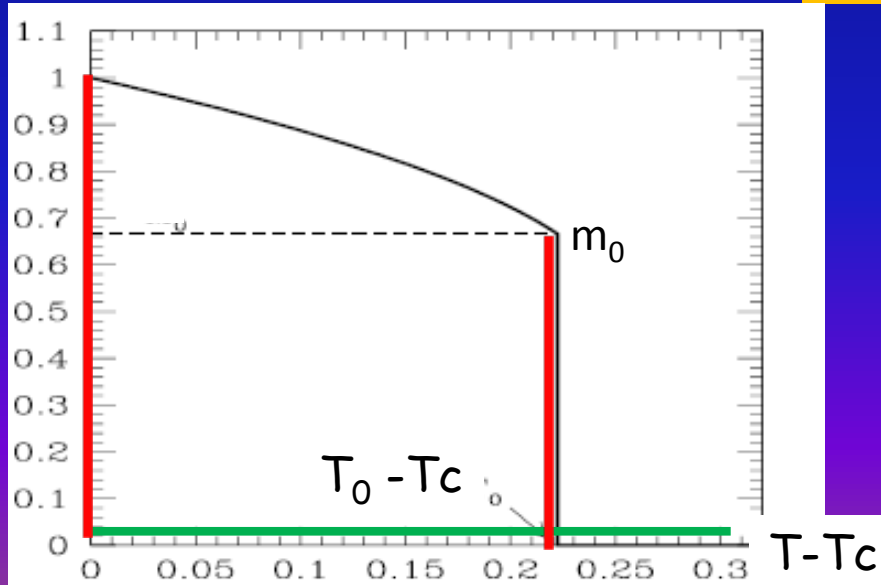
$$f(T, X, m) = f(T, X) + a_0(T - T_c) m^2 - b m^3 + c m^4$$

$b, c > 0$

Energie libre de Landau près de T_c : transition du 1^{er} ordre



$$a_0(T - T_c) m^2 - b m^3 + c m^4 \quad b, c > 0$$



$$m_0 = \frac{b}{2c} \quad T_0 - T_c = \frac{b^2}{4a_0c} \quad \chi = \frac{1}{2a_0(T_0 - T_c)} > 0$$

χ diverge à T_c , limite de métastabilité.

Energie libre de Landau près de T_c : point tricritique

Point de rencontre d'une ligne du 1^{er} et du 2^{ème} ordre

$$\text{paramètre d'ordre } \mathbf{m} = \frac{g\mu_B}{V} \sum_i \mathbf{S}_i$$

groupe de symétrie initial $O(3)$;
brisure $t \rightarrow -t$ i.e. $\mathbf{m} \rightarrow -\mathbf{m}$

énergie libre par unité de volume :

$$f(T, X, \mathbf{m}) = f(T, X) + a_0(T-T_c) \mathbf{m}^2 + b_0(p-p_c) (\mathbf{m}^2)^2 + c(\mathbf{m}^2)^3 + \dots$$

(pas de termes cubiques)

si $p-p_c > 0 \rightarrow$ transition du second ordre

si $p-p_c < 0 \rightarrow$ transition du premier ordre

si $p-p_c = 0 \rightarrow$ point tricritique

Exposants TRIcritiques de champ moyen

grandeur	comportement $T \geq T_c$	comportement $T \leq T_c$
Δc_H	$\dagger^{-\alpha}$	$(-\dagger)^{-\alpha'}$
m_0	-	$(-\dagger)^\beta$
χ	$\dagger^{-\gamma}$	$(-\dagger)^{-\gamma'}$
ξ	$\dagger^{-\nu}$	$(-\dagger)^{-\nu'}$

$$m_0(T_c) \sim \text{sign}(H)H^{1/\delta}$$

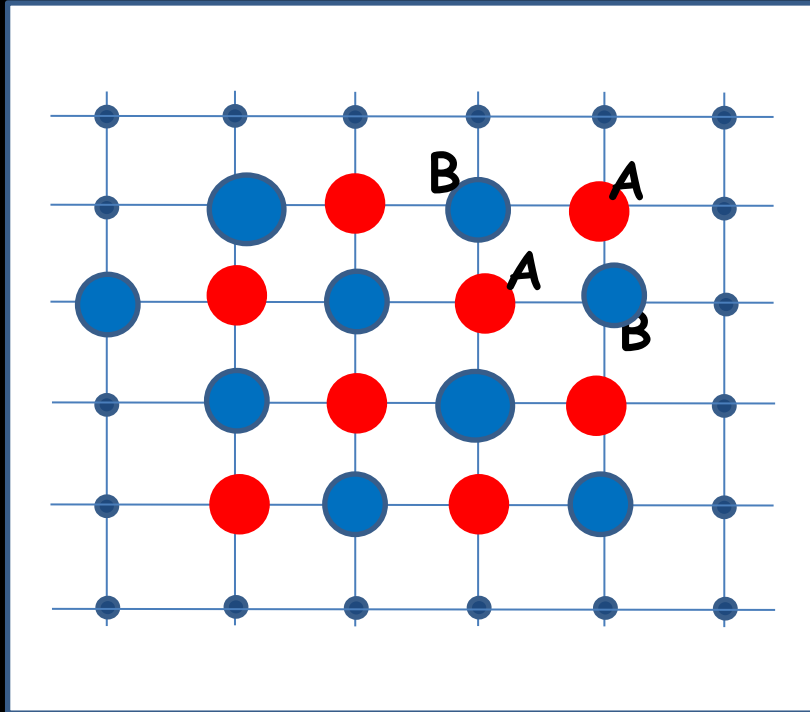
$\alpha = \alpha'$	1/2
β	1/4
$\gamma = \gamma'$	1
δ	5

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

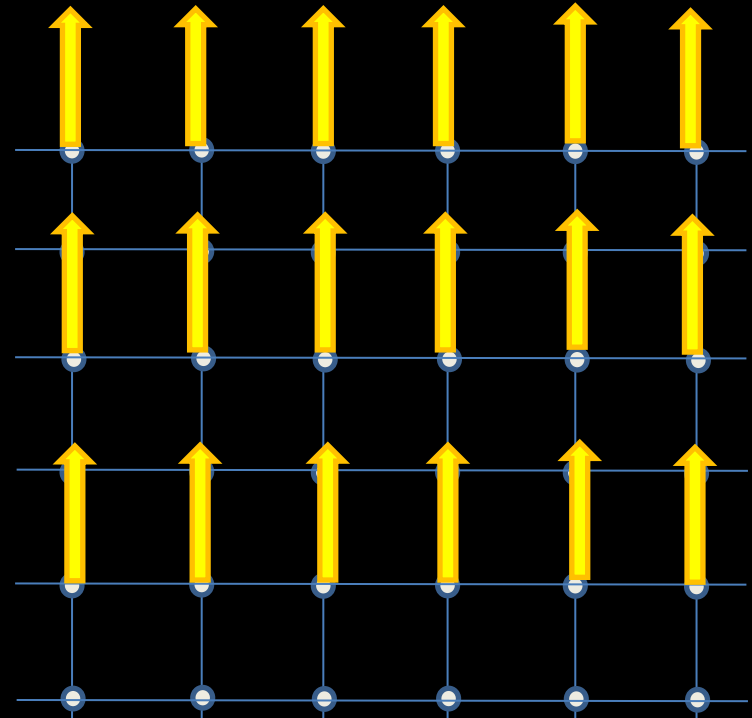
← cf relation thermodynamique
d'Ehrenfest pour une transition du 2^{ème} ordre

Une remarque très cri(p)tique

Lorsque la symétrie est brisée, et que le système est ordonné le paramètre d'ordre prend une valeur uniforme, indépendante du site, en champ moyen :



$T < T_c$



$$(C_A + C_B)(q = \frac{\pi}{a}) \neq 0 ; (C_A + C_B)(q \neq \frac{\pi}{a}) = 0$$

$$s_z(q = 0) \neq 0 ; s_z(q \neq 0) = 0$$

Symétrie brisée => peuplement macroscopique d'un mode q (condensation de Bose dans l'espace de Fourier.

La théorie de Curie-Landau s'avère très féconde, mais des déviations sont observées par rapport à ses prédictions :

I. Les exposants critiques dépendent du nombre de composantes n du p.o à D donnée et de D à n donné. Ils diffèrent des exposants de champ moyen.

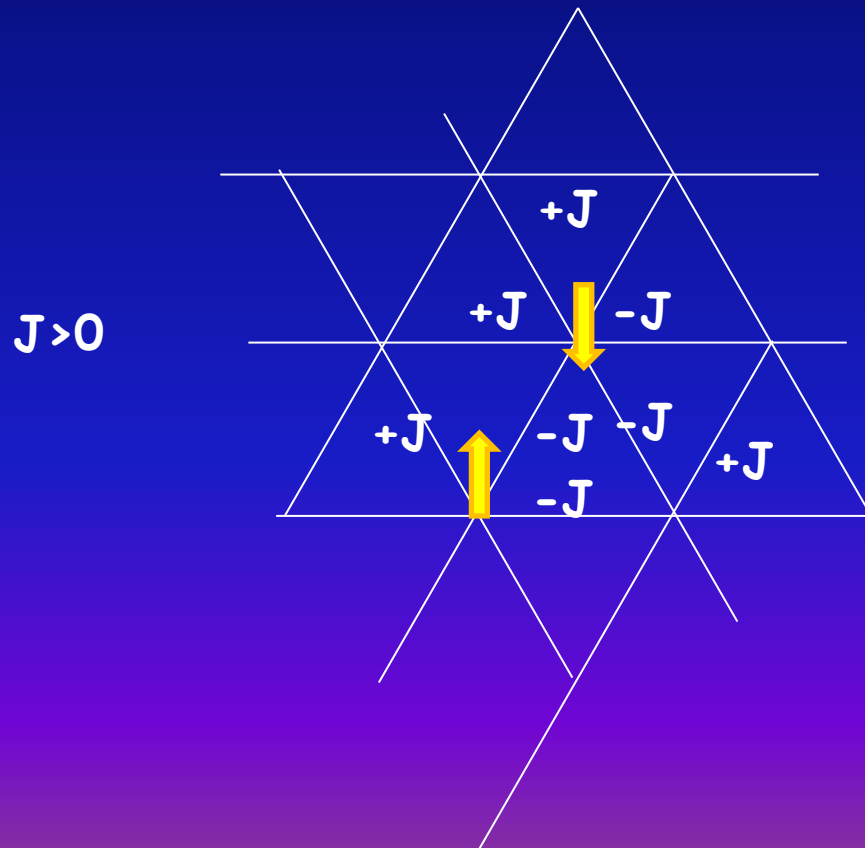
Exposants Critiques	Champ moyen	Ising D=2	Ising D=3	XY D=3	Heisenberg D=3
$\alpha = \alpha'$	0	0	0.12	- 0.013	- 0.13
β	1/2	1/8	0.326	0.348	0.368
$\gamma = \gamma'$	1	7/4	1.24	1.318	1.392
δ	3	15	5.2		
ν	(1/2)	1	0.631	0.68	0.708
η	(0)	1/4	0.035	0.037	0.037

La théorie de Curie-Landau s'avère très féconde, mais des déviations sont observées par rapport à ses prédictions :

II. L'existence, l'ordre et la nature de la transition de phase à **T finie** dépend de n , D , de la portée des interactions.

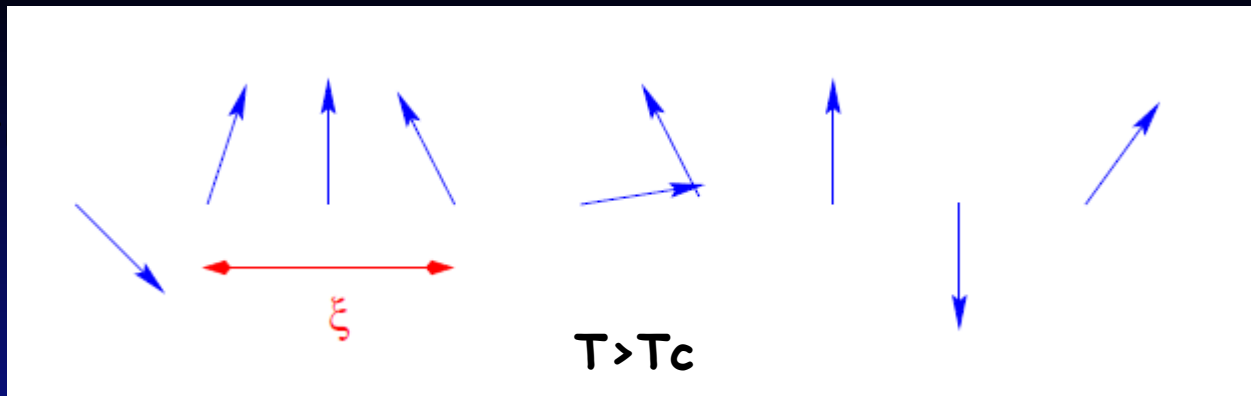
Nature du paramètre d'ordre	Transition à $D=1$ Ordre	Transition à $D=2$ Ordre	Transition à $D=3$ Ordre
Ising	✗	✓ 2	✓ 2
Potts	✗	✓ 1 ET 2	✓ 1 ET 2
XY	✗	✓ BKT	✓ 2
Heisenberg	✗	✗	✓ 2

Dans le cas de systèmes de spins frustrés et désordonnés (verres de spin) il existe une symétrie brisée et un type d'ordre. Mais il y a une infinité de modes de Fourier non nuls, d'occupation comparable (complexité de l'espace des phases). Mène à des dynamiques complexes.

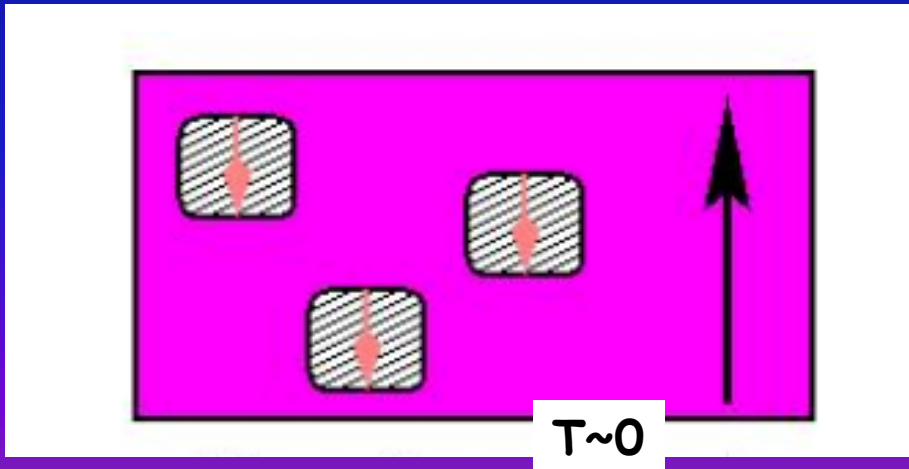


Les fluctuat

oisinage de T_c



A T_c , ξ diverge; tout les spins sont corrélés (mais l'ordre à longue portée n'est pas encore établi)



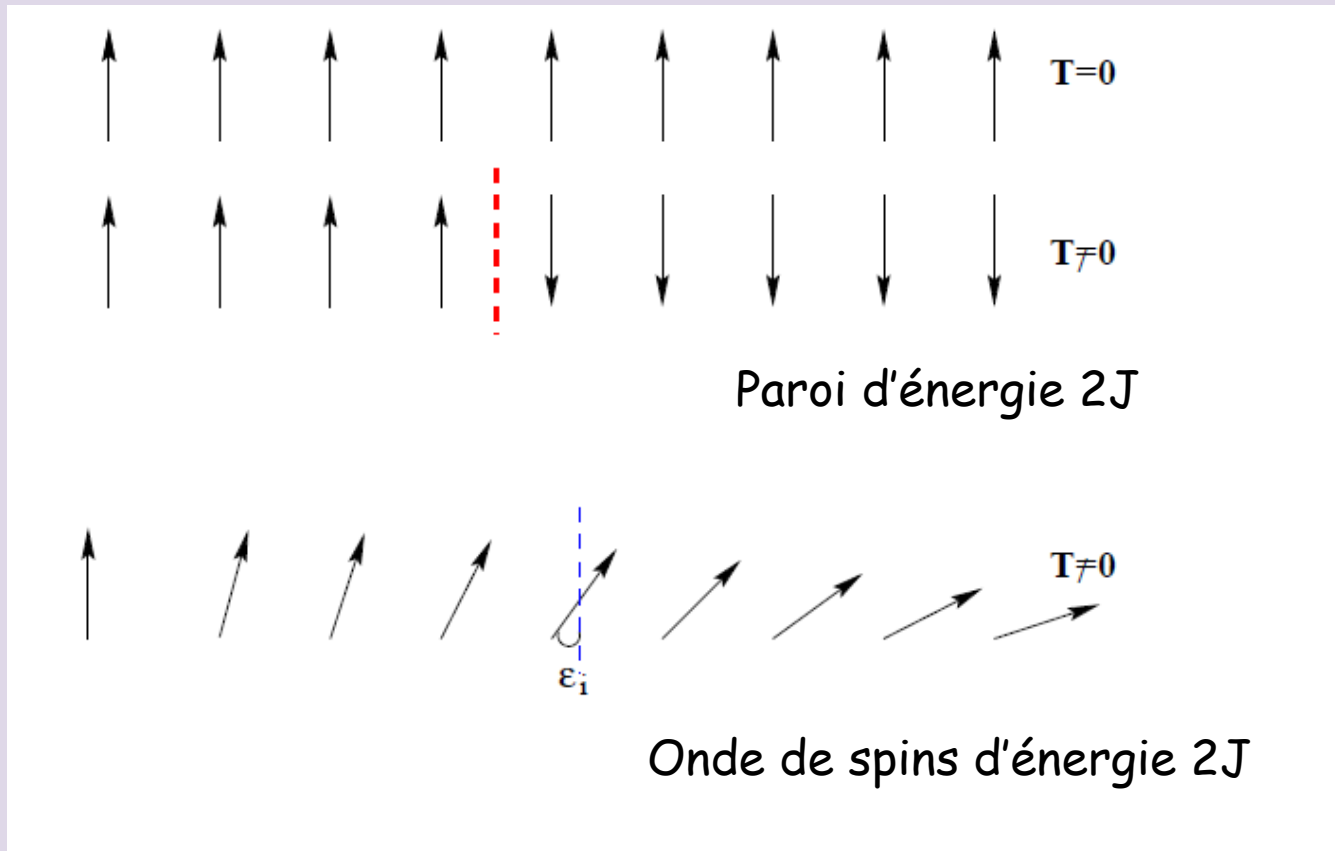
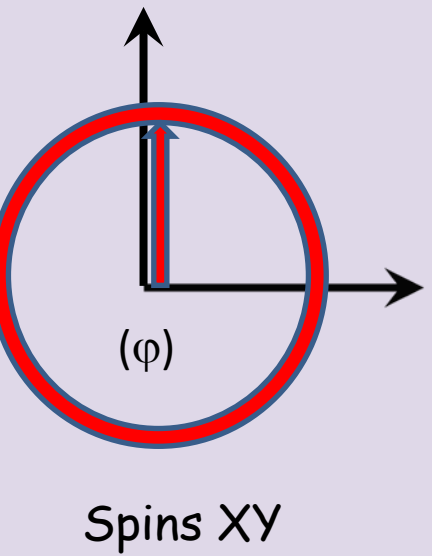
$$\Delta E = 2L \times J \rightarrow$$

L aussi petit que possible

$$\xi \sim a$$

Transition Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) du modèle XY à D=2

Concerne les films supraconducteurs, les couches de suprafluides, les spins
Classiques à 2 composantes, les spins quantiques $S=1/2$ à $D=1, \dots$



L'onde de spin est la manifestation de la symétrie brisée : elle « accompagne » l'ordre qui s'établit à $T < T_c$.

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\varphi_i - \varphi_j)$$

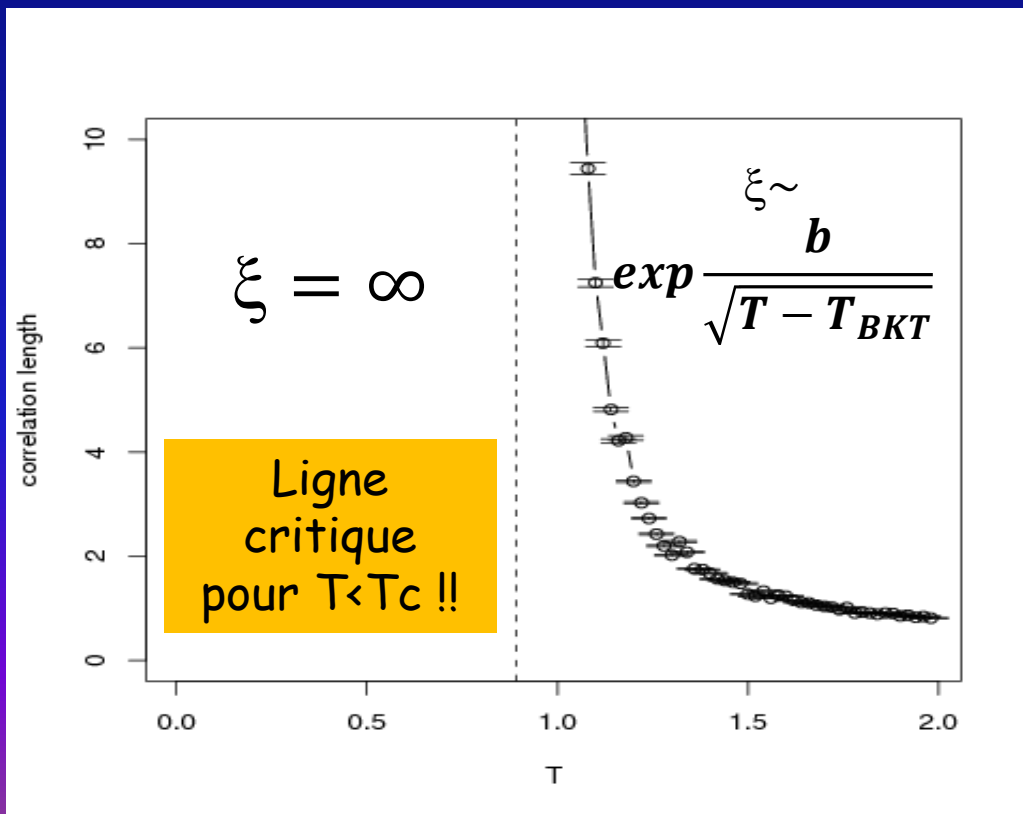
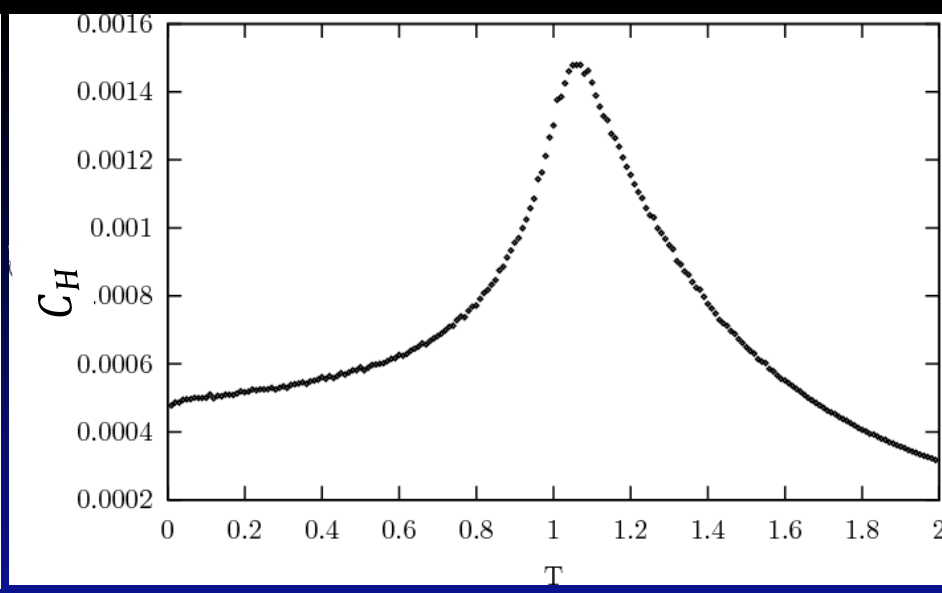
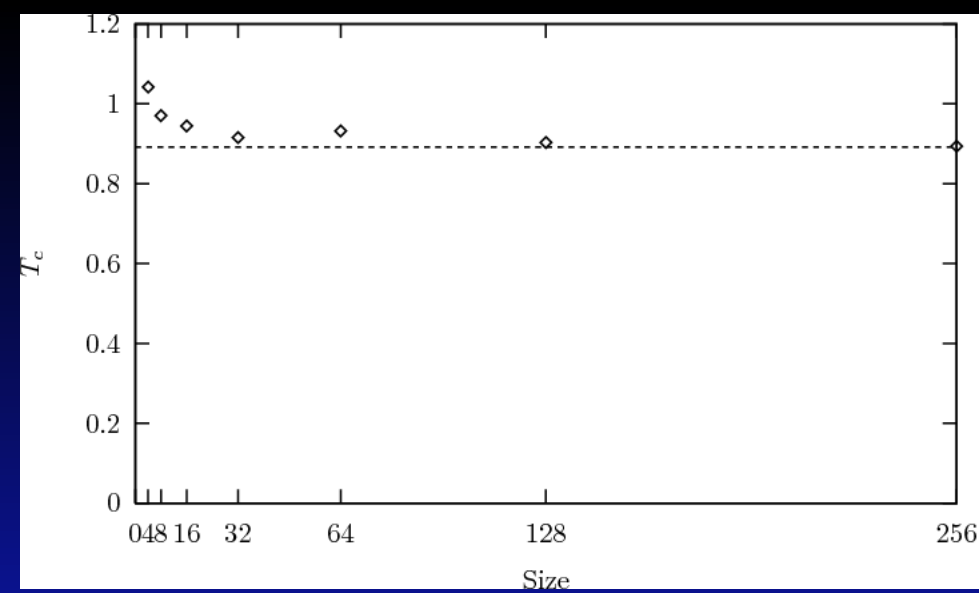
$\varphi_i \equiv \varphi(\mathbf{x}_i)$; $\varphi_j \equiv \varphi(\mathbf{x}_j) \approx \varphi(\mathbf{x}_i) + \sum_j a \mathbf{u}_j \cdot \nabla \varphi$ a est le pas du réseau

$$H = -2NJ + \frac{J}{2} \iint d^2 S (\nabla \varphi)^2$$

Les fluctuations de phase dominent les effets thermiques à basse T (celles d'amplitudes donnent une contribution exponentiellement faible)

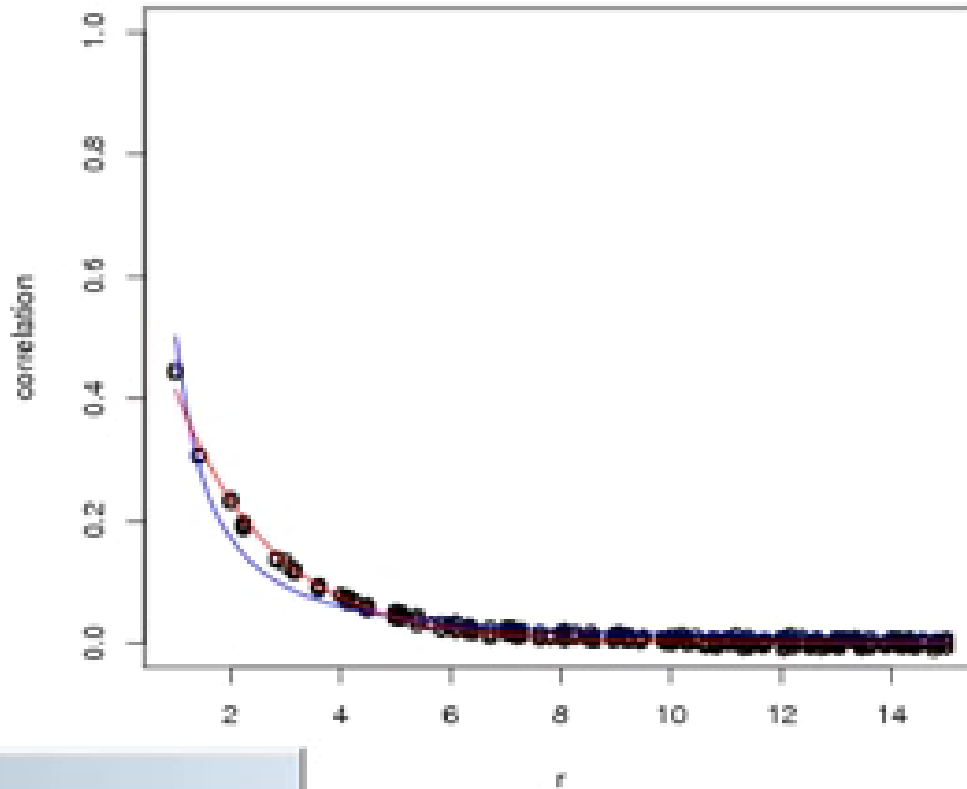
$$D=3 \rightarrow m \sim 1 - \alpha T/J$$

$$D=2 \rightarrow m=0 \text{ pour toute température finie !!}$$



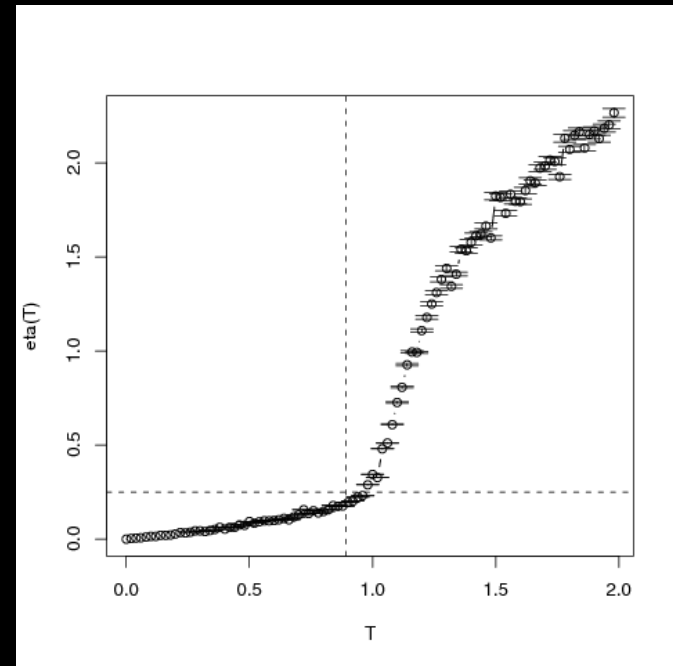
Pas d'ordre à longue portée pour tout T ($m=0$)

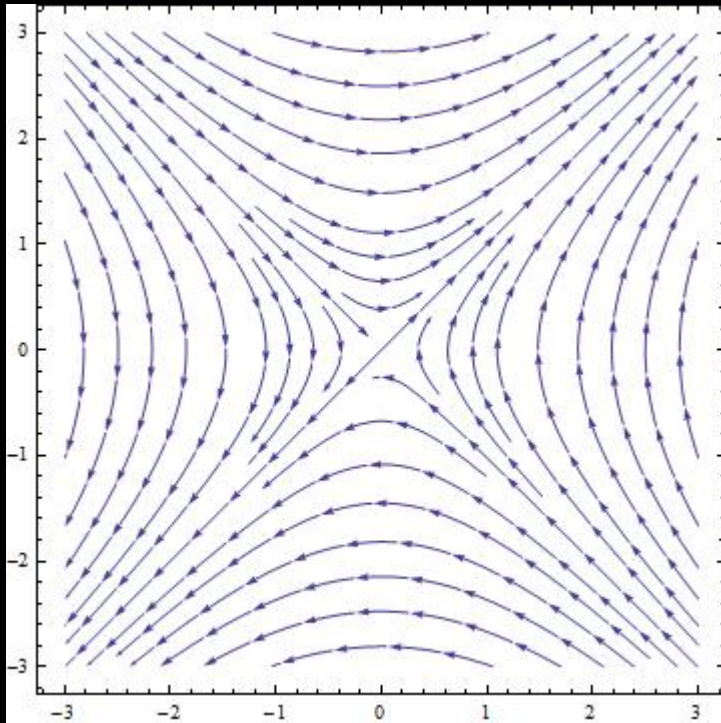
T = 1.36



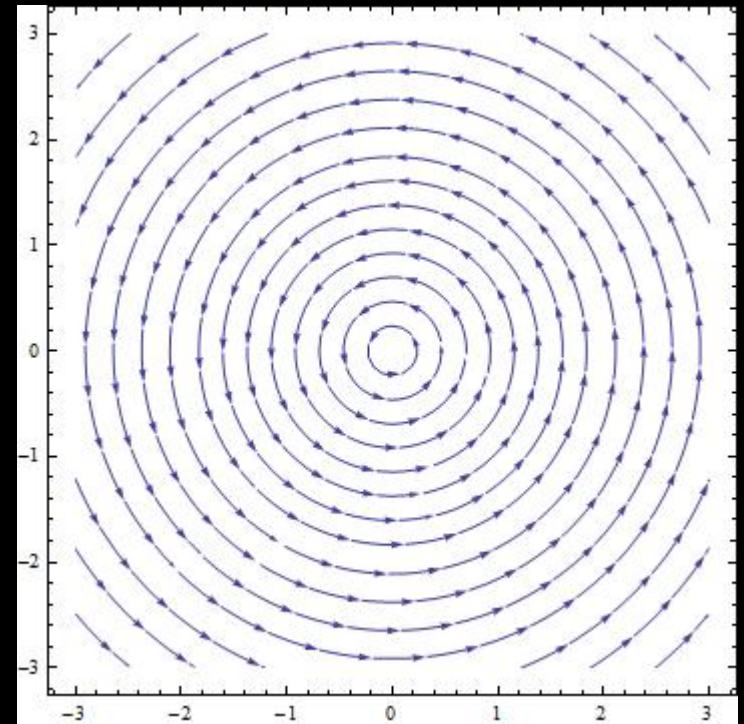
$$\langle S_i \cdot S_j \rangle \sim 1/r^\eta \exp -r/\xi \quad T > T_c$$

$$\langle S_i \cdot S_j \rangle \sim 1/r^\eta \quad T \leq T_c$$



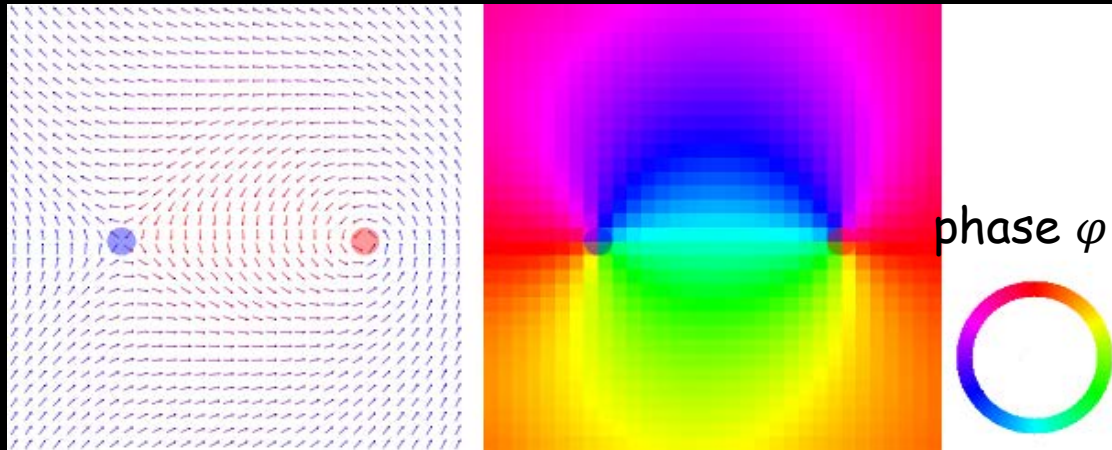


Antivortex

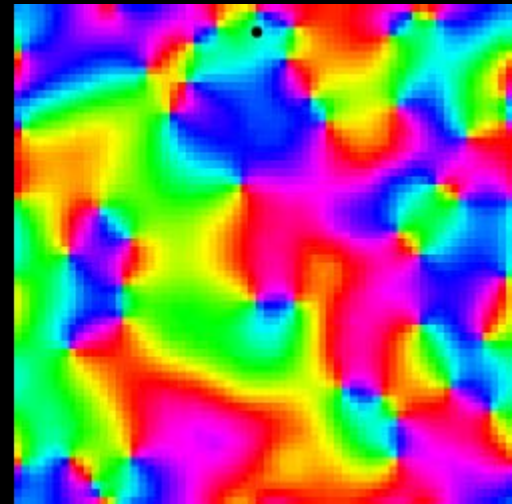
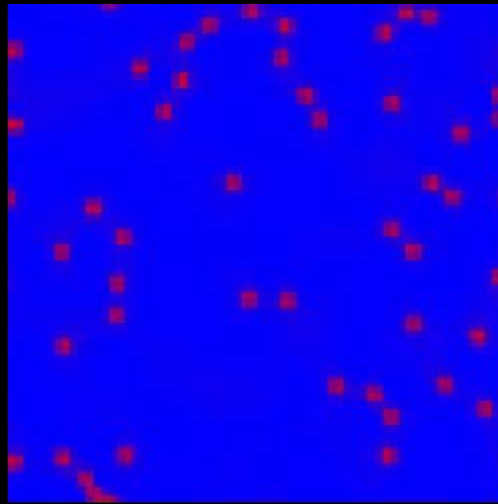
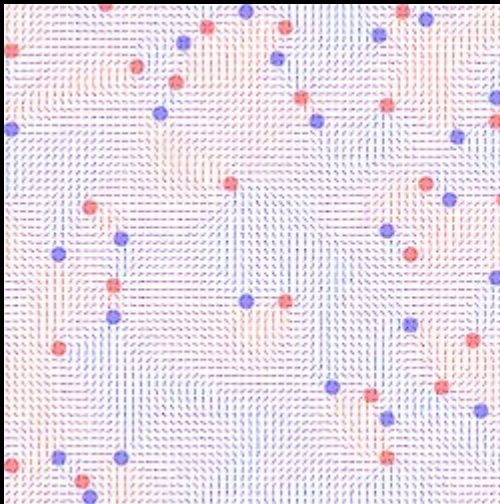


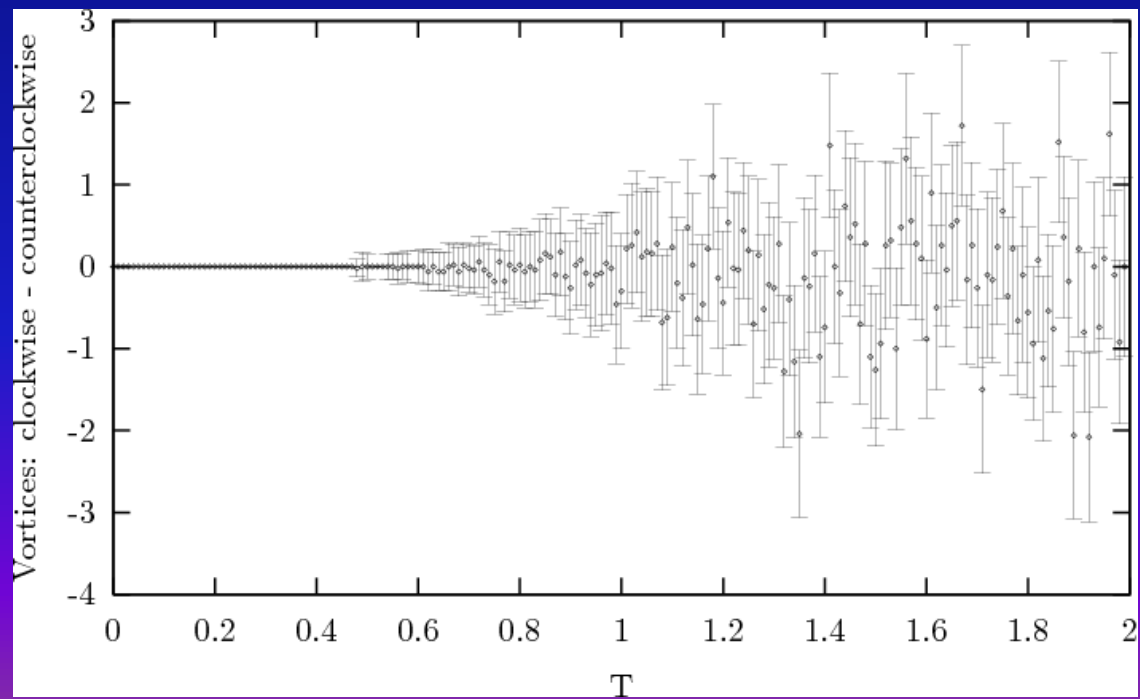
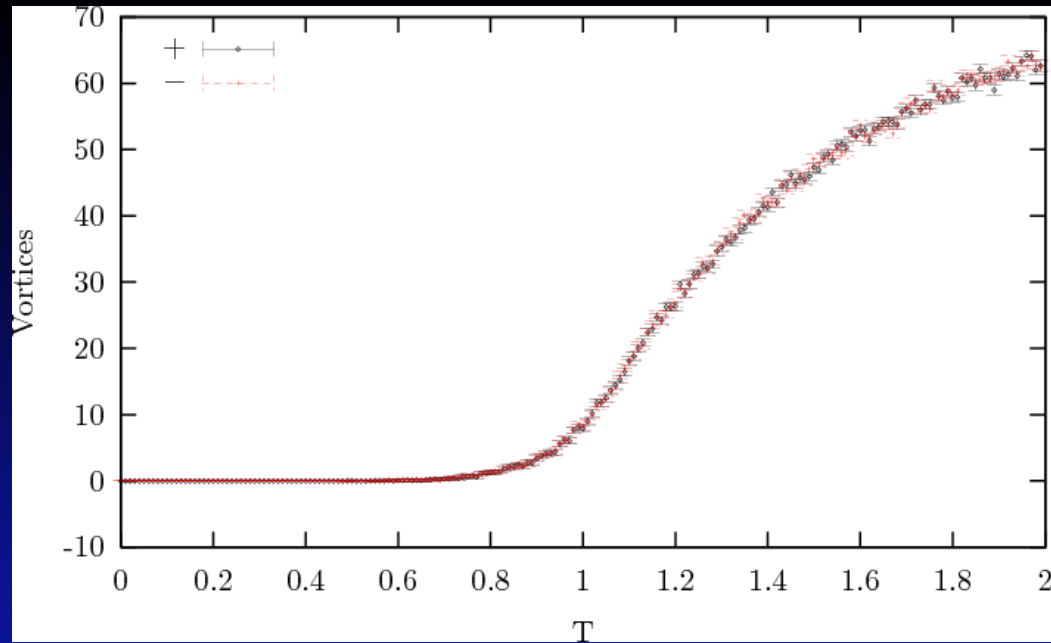
Vortex

- Défauts topologiques :
- stables thermiquement
 - non transformables l'un dans l'autre par rotation.
 - énergie $2J$

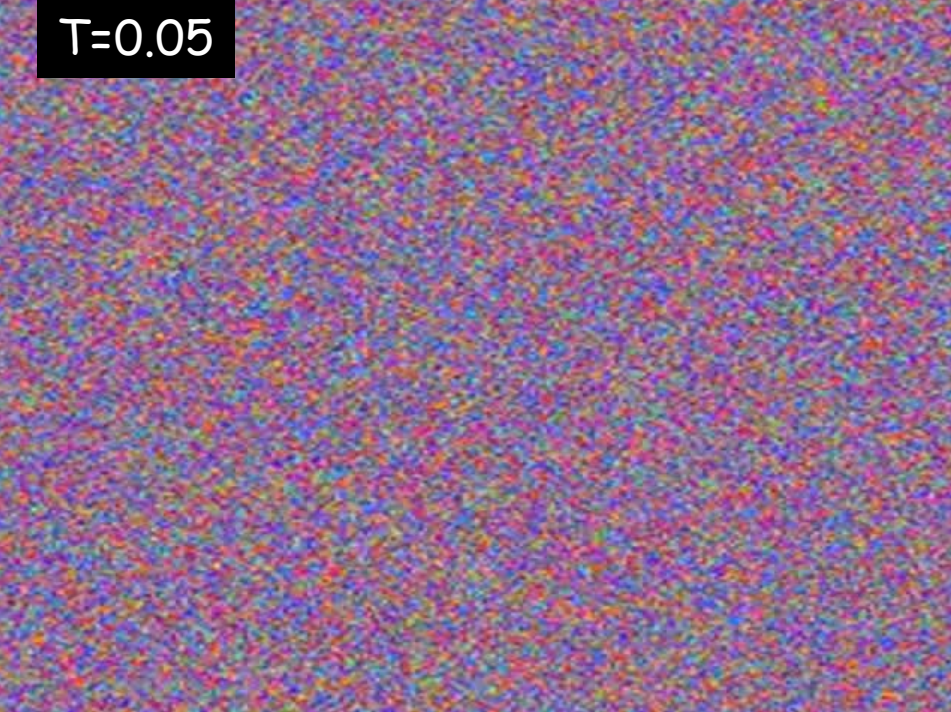


Configuration de vortex et antivortex dans le modèle XY

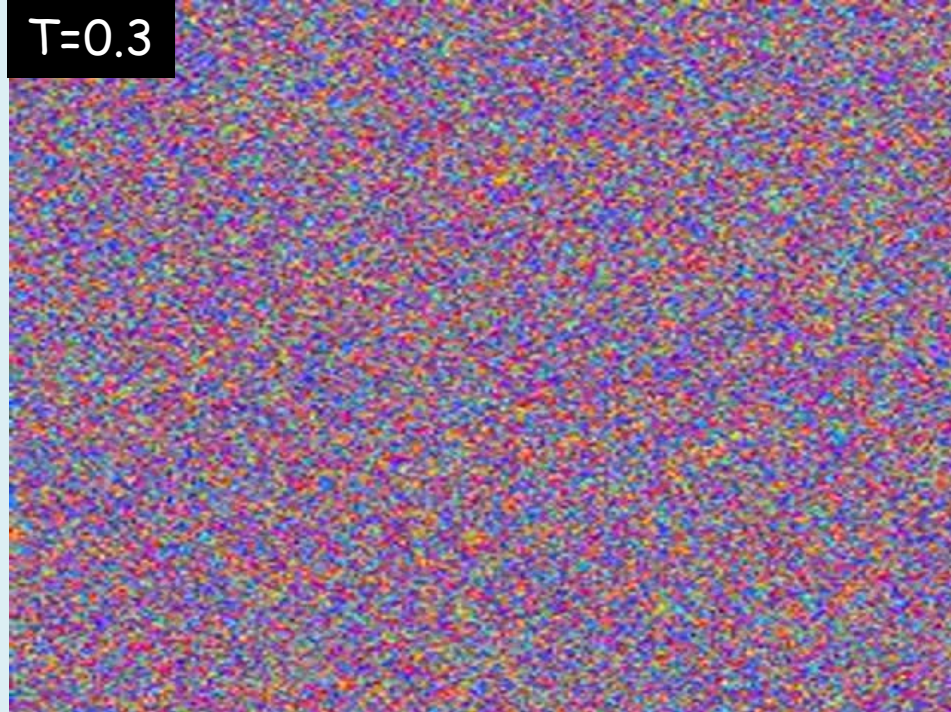




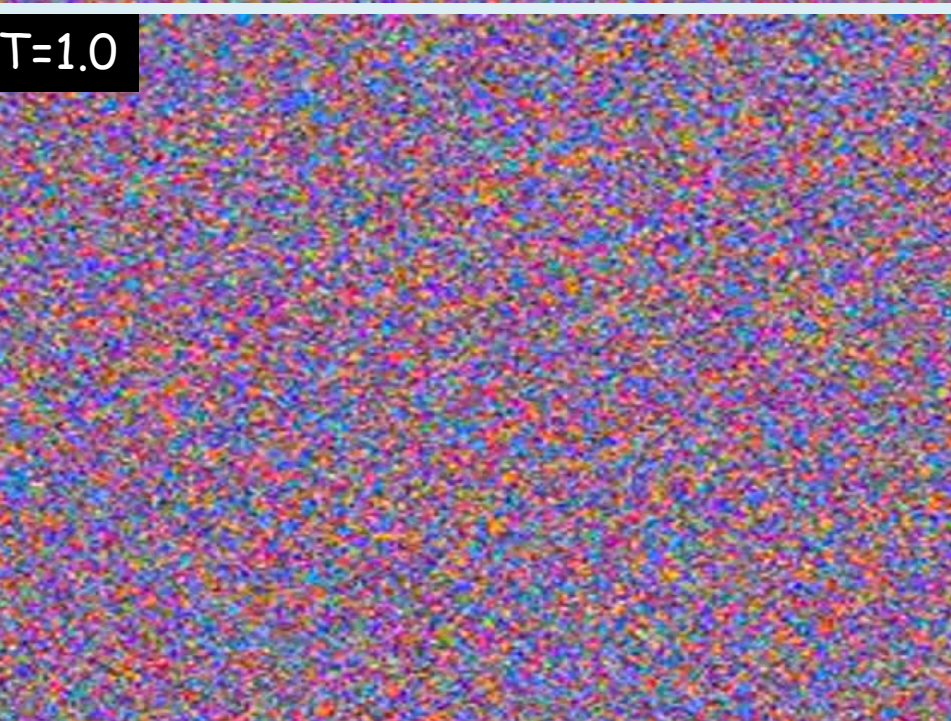
$T=0.05$



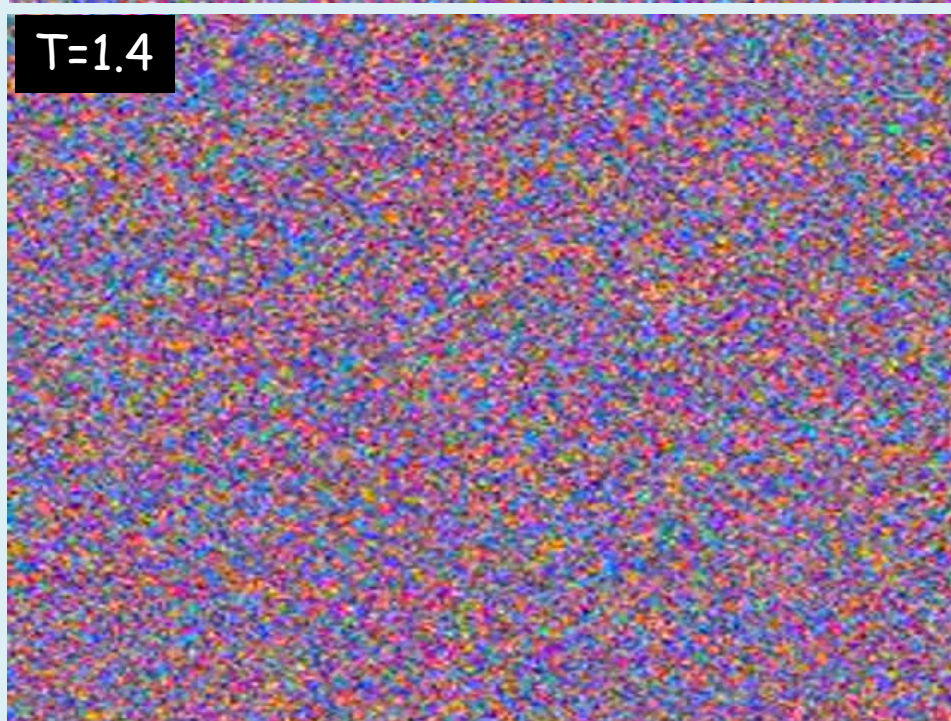
$T=0.3$



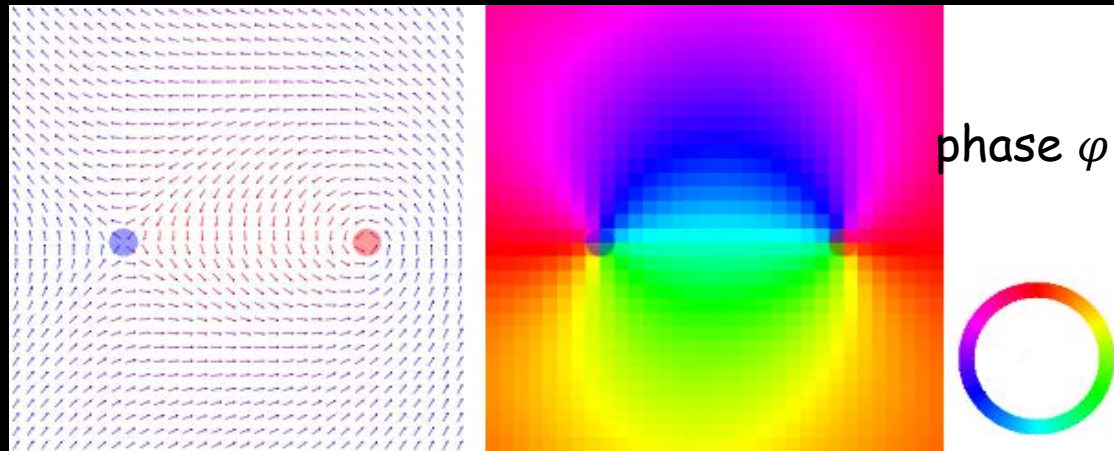
$T=1.0$



$T=1.4$



Où l'énergie rencontre l'entropie dans le modèle XY



$$E(\text{paire } V - AV) = 2\pi \left(\frac{\xi_0}{a}\right)^2 J \quad + \quad \pi J (-1) (+1) \text{Log} \frac{r}{\xi_0} \quad r = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$$

coeur
dipole V-AV

$$\langle r^2 \rangle = \iint d^2S \, r^2 \exp - \beta E(\text{paire } V - AV) / \iint d^2S \, \exp - \beta E(\text{paire } V - AV)$$

$$= \text{Cte} \frac{1 - \pi J \beta}{2 - \pi J \beta} \Rightarrow k_B T_{BKT} = \pi J / 2$$

Quelques références :

- ❖ **M. Le Bellac** *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*
- ❖ **P. Chaikin, T. Lubensky** *Principles of Condensed Matter Physics*
- ❖ **M. Kardar** *Statistical Mechanics II: Statistical Physics of Fields (MIT ocw)*
- ❖ **B. Simons** *Phase Transitions and Collective Phenomena (Cambridge Lecture Notes)*